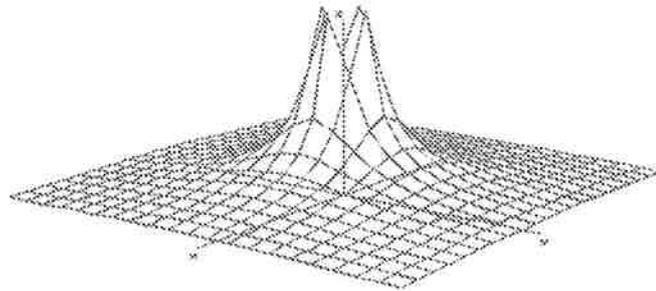


# Electrophysique



ECOLE D'INGENIEURS ST-IMIER

G. HUGUENIN

Mars 1992

## **Introduction**

Le but de ce cours est triple: en effet, il vise d'une part à établir de façon rigoureuse certains résultats postulés dans le cours d'électrotechnique (notion de capacité ou d'effet pelliculaire par exemple); d'autre part, il sert de base au cours de télécommunications en lui fournissant l'outil indispensable que sont les *équations de Maxwell*; enfin, il présente aux futurs ingénieurs divers outils qui leur permettront de résoudre certains problèmes liés aux champs électrique et magnétique ( cas de l'évaluation du potentiel par exemple).

## **Situation du cours**

Parmi les différents modèles que l'ingénieur ou le physicien sont amenés à développer pour décrire les phénomènes électromagnétiques qu'ils observent et utilisent, on peut dégager trois niveaux de complexité:

### **Premier niveau:**

La première approche possible pour décrire la matière qui nous entoure et les phénomènes qui agissent sur elle consiste à modéliser, de façon la plus exacte possible, les éléments qui la constituent. On travaille au niveau de la physique atomique et quantique; les modèles utilisés sont ceux de l'électron et de l'atome. On parle alors d'étude au *niveau microscopique*.

Il est clair que ce modèle devient très vite limité lorsqu'il s'agit de rendre compte de ce qui se passe sur un ensemble d'atome et, à plus forte raison, sur une partie d'une antenne par exemple !

### **Deuxième niveau:**

L'approche ici est plus *globale*, en effet, on ne considère plus les phénomènes au niveau de l'atome ou de la particule mais sur un ensemble relativement important de ces derniers. On parle, par opposition aux dimensions rencontrées au premier niveau, de *modèle macroscopique*. Ce modèle présente l'avantage de négliger les dimensions atomiques tout en faisant intervenir les dimensions du problème à étudier, comme la longueur d'une antenne ou la surface d'une capacité.

### **Troisième niveau:**

Pour beaucoup de problèmes rencontrés en électrotechnique ou en électronique, le modèle du deuxième niveau s'avère bien trop complet et excessivement lourd, voire impossible, à manipuler. On définit alors un modèle qui ne tient plus compte, ni de la géométrie, ni des dimensions du problème considéré. On parle alors de *circuits*. Il est à noter que ces circuits sont définis sur la base de phénomènes qui sont observables mais pas *démonstrables* sans changer de niveau de modélisation.

Ce cours se situe principalement dans le deuxième niveau décrit ci-dessus avec quelques incursions dans les premier et troisième niveaux.

## Organisation du cours

Le cours essaie de suivre, dans la mesure du possible, la démarche historique qui est aussi la plus proche de la pratique. En effet, on part des forces électriques et magnétiques pour introduire la notion de champs électrique et magnétique ainsi que celle de champs de déplacement et d'induction associés.

Le fait de tenir compte de la géométrie et des dimensions du problème considéré nécessite, non seulement une description des variations temporelles des phénomènes, mais aussi une description *spatiale* de ces derniers; on utilise à cette fin, les méthodes et résultats de *l'analyse vectorielle*.

Le *premier chapitre* est un rappel des principales méthodes utilisées en analyse vectorielle pour décrire la position d'un point, l'évolution d'un champ, etc... On y trouve les principales relations utilisées dans ce cours (ceci sans démonstration) ainsi que les systèmes de coordonnées utilisés pour représenter la géométrie des problèmes abordés.

Le *deuxième chapitre* est consacré à *l'électrostatique*, c'est-à-dire à l'étude de phénomènes électriques invariants dans le temps. A partir de l'expression de la force électrostatique, on définit le champ électrique, le champ de déplacement associé puis les différentes relations entre charge électrique, potentiel et tension électrique. Un dernier paragraphe est consacré à deux méthodes d'évaluation du potentiel dans des cas tout-à-fait généraux.

Le *troisième chapitre* s'intéresse au déplacement de charges dans les conducteurs (ce domaine d'intérêt étant défini ici par le terme d'*électrodynamique*). On y trouve les définitions du courant électrique, de la densité de courant, de la puissance et de la résistance électrique.

Le *quatrième chapitre* reprend la démarche de l'électrostatique en l'appliquant aux phénomènes magnétiques. On parle alors de *magnétostatique*. Les principales relations exposées dans ce chapitre sont celles qui décrivent les forces magnétiques, les champs magnétique et d'induction magnétique. On y trouve également la définition de l'inductance et une méthode d'analyse des circuits magnétiques.

Le *cinquième chapitre* aborde la notion d'induction donc de l'interdépendance entre les champs électrique et magnétique (*électromagnétisme*). En partant de la loi de la tension induite, on montre la relation entre les champs électrique et magnétique. On effectue ensuite une synthèse des relations faisant intervenir les champs électrique et magnétique ainsi que les champs associés pour aboutir aux *équations de Maxwell*, essentielles à la compréhension du phénomène de propagation des ondes électromagnétiques. Ce chapitre se termine par deux exemples d'utilisation des équations de Maxwell (effets de blindage et pelliculaire) et par la définition du *vecteur de Poynting* utilisé en télécommunications.

## Chapitre 1

### RAPPEL D'ANALYSE VECTORIELLE

#### Table des matières

1.	Rappel d'analyse vectorielle	page 1.1
1.1	Systèmes de coordonnées	page 1.1
1.2	Les vecteurs	page 1.2
1.3	Les champs scalaires	page 1.2
1.4	Les champs vectoriels	page 1.2
1.5	Dérivées de fonctions à plusieurs variables	page 1.3
1.6	Opérations de dérivation utilisées en électrophysique	page 1.3
	gradient	page 1.3
	laplacien scalaire	page 1.3
	divergence	page 1.4
	rotationnel	page 1.4
	laplacien vectoriel	page 1.4
1.7	Opérateur "nabla" ou "del" et "delta" (laplacien)	page 1.4
1.8	Opérations de dérivation en coordonnées cylindriques	page 1.5
1.9	Opérations de dérivation en coordonnées sphériques	page 1.6
1.10	Lignes de champ	page 1.7
1.11	Potentiel et équipotentielles	page 1.8
1.12	Opérations d'intégrations utiles en électrophysique	page 1.8
	a) Intégrale curviligne	page 1.8
	b) Intégrale de surface	page 1.9
	c) Intégrale vectorielle de volume	page 1.9
	d) Intégrales sur des grandeurs scalaires	page 1.9
1.13	Relations intégrales (théorèmes du gradient, de la divergence, du rotationnel et de Stokes)	page 1.10

1. Rappel d'analyse vectorielle

On trouvera ci-dessous, brièvement rappelés, les principales fonctions utilisées en électrophysique. Pour leur justification mathématique on voudra bien se référer au cours de mathématiques.

1.1 Systèmes de coordonnées

Afin de pouvoir représenter des objets dans l'espace, il est nécessaire de définir un système de coordonnées. Les trois principaux systèmes utilisés en électrophysique sont les systèmes *cartésien*, *cylindrique* et *sphérique*. La figure 1.1 présente ces trois systèmes.

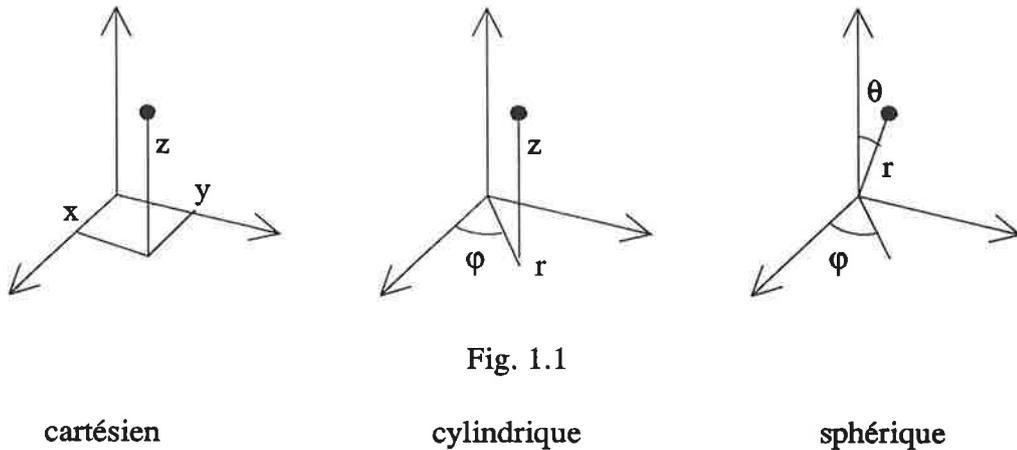


Fig. 1.1

cartésien

cylindrique

sphérique

Un vecteur s'exprime à l'aide de trois vecteurs unitaires de la façon suivante:  
- en coordonnées cartésiennes

$$\vec{A} = (a_x; a_y; a_z) = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z$$

- en coordonnées cylindriques

$$\vec{A} = (a_r; a_\phi; a_z) = a_r \vec{u}_r + a_\phi \vec{u}_\phi + a_z \vec{u}_z$$

- en coordonnées sphériques

$$\vec{A} = (a_r; a_\theta; a_\phi) = a_r \vec{u}_r + a_\theta \vec{u}_\theta + a_\phi \vec{u}_\phi$$

Remarque : Les trois vecteurs unitaires définis ci-dessus caractérisent trois dimensions métriques indépendantes, c'est-à-dire qui définissent une position (en mètre) de l'objet à considérer. Une quatrième dimension, le temps, également indépendante des trois autres, permet de définir l'évolution du phénomène.

Les quatre dimensions (variables) sont donc, dans le système cartésien:  $x, y, z$  et  $t$ .

On est amené à utiliser des fonctions à quatre variables du type  $f(x, y, z, t)$  et qui servent, suivant les cas :

- à décrire la position d'un point (trajectoire, surface par exemple)
- à définir un champ scalaire (cf. paragraphe 1.3)
- à définir un champ vectoriel (cf. paragraphe 1.4)

## 1.2 Les vecteurs

Ces éléments permettent de définir la position d'un point dans l'espace et sont notés de la façon suivante:

$$\vec{A} = (a_x(t); a_y(t); a_z(t)) = a_x(t) \cdot \vec{u}_x + a_y(t) \cdot \vec{u}_y + a_z(t) \cdot \vec{u}_z$$

Les fonctions  $a(t)$  peuvent être constantes (vecteur fixe ou immobile) mais ne peuvent en aucun cas dépendre des coordonnées  $x, y$  et  $z$  (ou des coordonnées sphériques ou cylindriques).

## 1.3 Les champs scalaires

Un champ scalaire est défini par une fonction  $f(x, y, z, t)$  qui fait correspondre à chaque point de l'espace une grandeur scalaire. Cette fonction  $f(x, y, z, t)$  permet donc de décrire une propriété scalaire de l'espace (température, pression par exemple).

## 1.4 Les champs vectoriels

Un champ vectoriel est défini par une fonction vectorielle qui fait correspondre à chaque point de l'espace une grandeur vectorielle. L'ensemble de vecteur ainsi obtenu permet de décrire les propriétés vectorielles de l'espace (vitesse, force par exemple).

Un champ vectoriel se note:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= (a_x(x, y, z, t); a_y(x, y, z, t); a_z(x, y, z, t)) \\ &= a_x(x, y, z, t) \cdot \vec{u}_x + a_y(x, y, z, t) \cdot \vec{u}_y + a_z(x, y, z, t) \cdot \vec{u}_z \end{aligned}$$

ou  $a_x(x, y, z, t)$ ,  $a_y(x, y, z, t)$  et  $a_z(x, y, z, t)$  sont des fonctions (qui dans certains cas peuvent se limiter à des constantes) qui forment la fonction vectorielle.

**Remarque** : il importe de bien différencier la notion de vecteur (défini par des *constantes* par rapport aux trois dimensions métriques) de celle de champ vectorielle qui caractérise un ensemble de vecteurs dans l'espace, ensemble qui est défini par des *fonctions* des trois dimensions métriques.

### 1.5 Dérivées de fonctions à plusieurs variables

Les quatre variables étant indépendantes, l'opération de dérivation s'effectue de la même manière que lors de la dérivation d'une fonction à une variable. Seule la notation change, ainsi les quatre dérivées de  $f(x,y,z,t)$  par rapport à  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $t$  s'écrivent :

$$\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x}$$

Les dérivées d'ordre supérieur à 1 s'écrivent par exemple:

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial x \partial y} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial x^2}$$

### 1.6 Opérations de dérivation utilisées en électrophysique

Deux types d'opérations sont utilisées en électrophysique: celles qui s'appliquent à un champ scalaire et celles qui concernent les champs vectoriels.

#### Champ scalaire

##### a) gradient

On définit le *gradient* d'un champ scalaire déterminé par une fonction  $f(x,y,z,t)$  par :

$$\text{grad} \vec{f}(x,y,z,t) = \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial z} \vec{u}_z$$

Il s'agit d'une grandeur vectorielle (champ vectoriel) qui permet de déterminer la variation (selon  $x$ ,  $y$  et  $z$ ) du champ scalaire. Cette opération a le même rôle pour un champ scalaire que la dérivée simple d'une fonction à une dimension.

##### b) laplacien scalaire

Cette opération est définie en prenant la divergence (cf. ci-dessous) du gradient du champ scalaire:

$$\text{div}(\text{grad} \vec{f}(x,y,z,t)) = \frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial z^2}$$

Champ vectoriel

a) divergence

On définit la *divergence* d'un champ vectoriel par le champ scalaire obtenu en effectuant l'opération suivante:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Cette opération permet de décrire les propriétés d'expansion d'un champ vectoriel.

b) rotationnel

On définit le *rotationnel* d'un champ vectoriel par l'opération vectorielle suivante :

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)$$

c) laplacien vectoriel

On définit le laplacien d'un champ vectoriel par le double rotationnel de celui-ci:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = \Delta \vec{A}$$

en coordonnées cartésiennes on obtient:

$$\left( \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} \right) \vec{u}_y + \left( \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right) \vec{u}_z$$

Note :  $a_x$  est à interpréter comme  $a_x(x,y,z,t)$ ; de même pour  $a_y$  et  $a_z$ . Cette notation abrégée est motivée par un souci d'alléger l'écriture de l'expression.

1.7 Opérateurs "nabla" ou del" et "delta" (laplacien)

Afin de simplifier l'écriture des opérations vectorielles (ce qui, malheureusement, ne facilite pas la compréhension des opérations effectuées) on introduit deux *opérateurs* qui sont des fonctions de dérivations vectorielles:

a) opérateur "nabla" ou "del"

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

on vérifie sans peine que

$$\vec{\nabla}f = \text{grad}(f)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \text{div}\vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \text{rot}\vec{A}$$

b) Opérateur "delta" ou laplacien

On défini:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Le laplacien scalaire s'écrit alors

$$\text{div}(\text{grad}(f)) = \Delta f$$

et le laplacien vectoriel s'écrit

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \Delta \vec{A}$$

Remarque : Les relations décrites dans ce paragraphe ne sont valables que pour un système de coordonnées cartésiennes. Pour les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques, ces relations sont décrites dans les paragraphes 1.8 et 1.9.

### 1.8 Opérations de dérivation en coordonnées cylindriques

Si la représentation d'un point dans un tel système de coordonnées ne présente pas de difficultés particulières (cf. fig. 1.1), il convient néanmoins de préciser la façon de représenter un vecteur (fig 1.2).

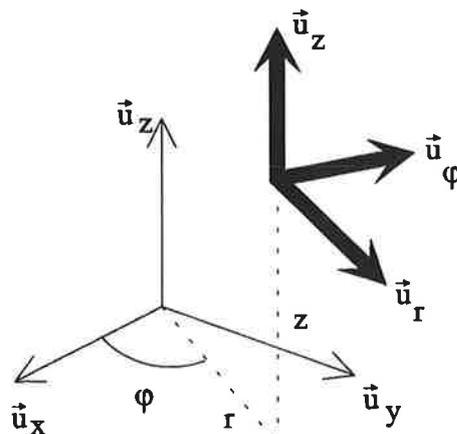


Fig. 1.2

Les vecteurs  $\vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_\phi$  et  $\vec{u}_z$  sont orthogonaux deux à deux et sont mobiles par rapport au système xyz de référence. On parle de repère *mobile*.

Dans ce système de coordonnées, les fonctions de dérivations décrites au paragraphe 1.7 deviennent:

$$\text{grad}(f) = \vec{\nabla}f = \left( \frac{\partial f}{\partial r}; \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi}; \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\text{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\varphi + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_r)}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_z$$

$$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Le laplacien vectoriel s'obtient en utilisant la définition en rotationnel (cf. § 1.7)

### 1.9 Opérations de dérivation en coordonnées sphériques

On trouvera à la figure 1.3 la représentation du repère mobile (cf. § 1.8) en coordonnées sphériques.

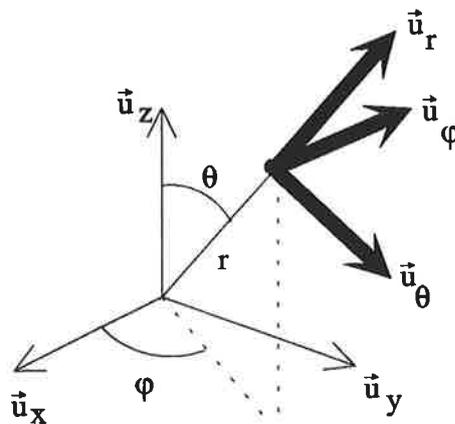


Fig. 1.3

Les opérations de dérivations s'expriment par:

$$\text{grad}(f) = \vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(\sin \theta a_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r \sin \theta a_\phi)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\phi \end{aligned}$$

$$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

Ici également le laplacien vectoriel doit être calculé à l'aide de la définition en rotationnel (cf. § 1.7).

### 1.10 Lignes de champ

La représentation des champs vectoriels n'est pas toujours aisée, bien au contraire. Afin de pouvoir simplement visualiser la répartition dans l'espace du champ, on définit les *lignes de champ* par un ensemble de *courbes tangentes* aux vecteurs formant ce champ.

Le calcul des lignes de champ à partir de l'expression du champ se base sur le fait que l'on cherche un réseau de courbes dont l'accroissement, dans le repère considéré et en un point donné, est parallèle au vecteur définissant le champ. On obtient donc les relations suivantes:

en coordonnées cartésiennes:

$$\frac{\partial x}{a_x} = \frac{\partial y}{a_y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{a_y} = \frac{\partial z}{a_z}$$

en coordonnées cylindriques:

$$\frac{\partial r}{a_r} = \frac{r \partial \phi}{a_\phi} \quad \text{et} \quad r \frac{\partial \phi}{a_\phi} = \frac{\partial z}{a_z}$$

en coordonnées sphériques:

$$\frac{\partial r}{a_r} = \frac{r \partial \theta}{a_\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta}{a_\theta} = \frac{\partial \phi}{a_\phi}$$

### 1.11 Potentiel et équipotentiels

On définit le potentiel  $V$  (scalaire) d'un champ vectoriel, par le champ scalaire dont le *gradient* est égal, au signe près, à ce champ vectoriel. On a donc la relation:

$$-\vec{\nabla}V = \vec{A}$$

On définit les *équipotentiels* par un ensemble de courbes le long desquels le potentiel est constant.

Remarque: On peut montrer (cf. exercices) que le potentiel d'un champ n'existe que si le rotationnel de ce dernier est nul.

### 1.12 Opérations d'intégrations utiles en électrophysique

Il convient de préciser en premier lieu que les fonctions d'intégrations sont peu employées pour résoudre un problème précis. En effet, leur résolution mathématique pose souvent des problèmes insolubles par voie analytique. Pour cette raison, on préférera résoudre les problèmes à l'aide des opérations de dérivation. Cependant, en ce qui concerne la compréhension des phénomènes, la notation en intégrale est souvent plus explicite que la notation en dérivée, c'est pourquoi on trouvera ci-dessous, les principales fonctions d'intégration utilisées dans ce cours ainsi qu'un exemple de leur signification physique.

#### a) Intégrale curviligne

Cette opération s'applique à un champ vectoriel, et s'effectue le long d'une courbe  $C$  donnée également sous forme vectorielle et d'extrémités  $P_0$  et  $P_1$ . Elle s'écrit:

$$\int_{P_0}^{P_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{P_0}^{P_1} a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

Dans le cas où la courbe est fermée (cercle, ellipse...) cette opération s'écrit:

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Exemple d'utilisation:

Si le champ vectoriel représente le champ de gravitation, le calcul de cette intégrale le long d'une trajectoire définie permet de calculer le travail effectué pour déplacer une masse.

## b) Intégrale de surface

Cette opération s'applique à un champ vectoriel et s'effectue sur une surface  $S$  exprimée sous forme vectorielle (vecteur normal à la surface). Elle s'écrit:

$$\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Dans le cas où la surface  $S$  définit un volume (surface fermée: sphère, ellipsoïde...) cette opération s'écrit:

$$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Exemple d'utilisation:

Si le champ vectoriel représente le champ de vitesse d'un liquide, le calcul de cette intégrale sur la surface  $S$  donne le débit (en mètres-cube par seconde) du liquide à travers  $S$ .

## c) Intégrale vectorielle de volume

Cette opération s'applique à un champ vectoriel et s'effectue sur un volume donné sous forme *scalaire*; le résultat est donc un vecteur. Elle s'écrit:

$$\iiint_V \vec{A} dV$$

**Remarque** : le volume est évidemment toujours fermé et l'analogie avec la courbe et la surface fermées n'existe pas en électrophysique.

Exemple d'utilisation:

Si le champ vectoriel est défini par le gradient du champ de pression (scalaire) dans un fluide, alors la force (vectorielle) exercée sur un volume  $V$  se calcule à l'aide de l'intégrale vectorielle sur le volume  $V$  (principe d'Archimède).

## d) Intégrales sur des grandeurs scalaires

On peut également définir les opérations d'intégration sur une grandeur scalaire et leur signification est alors plus simple. Les trois exemples suivants permettent d'illustrer leur rôle:

- si la densité d'un fil est donnée par unité de longueur (densité linéique), alors son intégration sur la longueur du fil permet de calculer le poids de ce fil.
- si la densité d'une feuille est donnée par unité de surface (densité surfacique), alors son intégration sur la surface de la feuille permet de calculer le poids de cette feuille.

- si la densité d'un corps est donnée par unité de volume (densité volumique), alors son intégration sur le volume du corps permet de calculer le poids de ce dernier.

### 1.13 Relations intégrales

On peut démontrer les relations suivantes:

**Théorème du gradient:**

$$\iiint_V \vec{\nabla} f \, dV = \oiint_S f \, d\vec{S}$$

**Théorème de la divergence**

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \, dV = \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

**Théorème du rotationnel**

$$\iiint_V \vec{\nabla} \times \vec{A} \, dV = -\oiint_S \vec{A} \times d\vec{S}$$

**Théorème de Stokes**

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

## Chapitre 2

### ELECTROSTATIQUE

#### Table des matières

2.	Introduction	page 2.1
2.1	Forces électrostatique (forces de Coulomb)	page 2.1
2.2	Champ électrique	page 2.2
2.3	Champ de déplacement électrique	page 2.2
	Tableau de la permittivité relative	page 2.3
2.4	Champ électrique produit par n charges ponctuelles	page 2.3
2.5	Potentiel produit par n charges ponctuelles	page 2.4
2.6	Flux du champ électrique	page 2.4
2.7	Théorème de Gauss	page 2.5
2.8	Flux et théorème de Gauss sur le champ de déplacement	page 2.6
2.9	Tension et potentiel	page 2.6
2.10	Equipotentiellles et lignes de champ	page 2.8
2.11	Densités de charges	
	- densité de charge linéique	
	- densité de charge surfacique	
	- densité de charge volumique	page 2.8
2.12	Charges dans un milieu conducteur	page 2.8
2.13	Capacité entre deux conducteurs	page 2.9
2.14	Capacité plane	page 2.10
2.15	Capacité coaxiale	page 2.11
2.16	Capacité sphérique	page 2.12
2.17	Capacité bifilaire	page 2.12
2.18	Méthodes d'évaluation du potentiel	page 2.13
	a) Méthode graphique de Lehmann	page 2.13
	b) Méthode des différences finies	page 2.14

## 2. Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter un modèle et un outil de calcul qui permettent, à la fois, de comprendre et, dans certains cas particuliers, de calculer le comportement de circuits ne faisant intervenir que des particules chargées *immobiles*, ceci dans divers milieux (isolants et conducteurs). Il convient de préciser ici que, par souci de simplification, toute la question de la matière polarisée n'est pas abordée dans ce chapitre. Le modèle développé ici ne permettra donc pas, par exemple, de décrire l'effet piézo-électrique de certains matériaux. Il s'avère cependant amplement suffisant pour expliquer la plupart des problèmes de nature électrostatique rencontrés par l'ingénieur. On trouvera plus de détails au sujet de la matière polarisée dans la référence 1.

### 2.1 Forces électrostatiques (forces de Coulomb)

L'expérience montre qu'il existe des particules chargées et qu'elles exercent une force de nature *électrique* les unes sur les autres. Ces particules peuvent s'attirer ou se repousser suivant le *signe* de leur charge: des charges de même signe se repoussent, des charges de signes contraires s'attirent.

La charge électrique d'une particule est un multiple entier (positif ou négatif) de la charge élémentaire de l'électron et cette charge présente la propriété importante d'être conservative. Les résultats de la physique corpusculaire montrent en effet que dans la matière, l'électron a une durée de vie qui peut être considérée comme infinie.

L'expérience de Coulomb (fig. 2.1) montre que la force exercée entre deux particules chargées est proportionnelle au produit des charges  $Q_1$  et  $Q_2$  et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare (éq. 2.1).

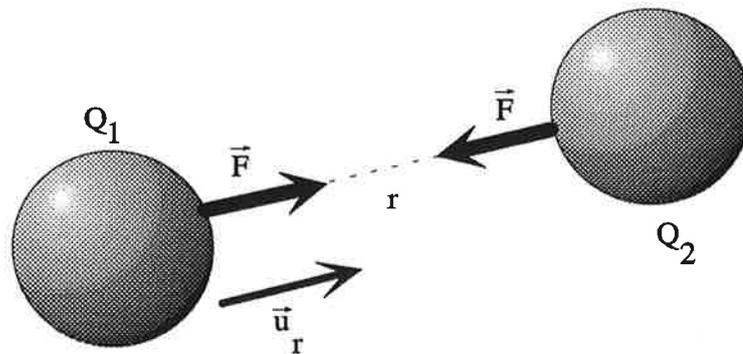


Fig. 2.1

$$\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r^2} \vec{u}_r \quad [C] \quad (2.1)$$

avec  $Q_1$  et  $Q_2$  les charges en coulombs

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ [As/Vm]}$$

$\epsilon_r$  : permittivité relative [1]  
cf. tableau 2.1

$r$  : distance entre les particules [m]  
 $\vec{u}_r$  : vecteur unitaire situé dans l'axe des charges

## 2.2 Champ électrique

Un ensemble de particules chargées ( $Q_1 \dots Q_n$ ) définit, pour une particule de mesure ( $q$ ), un champ *vectoriel* de forces (cf. fig. 2.2). L'intensité de ce champ de forces est donc dépendant de la valeur prise par la charge de la particule de mesure ( $q$ ). On définit les propriétés acquises par l'espace lors de l'arrangement des particules  $Q_1$  à  $Q_n$  par le *champ électrique* dont l'expression est le quotient du champ de forces par la particule de mesure ( $q$ ) (équation 2.2).

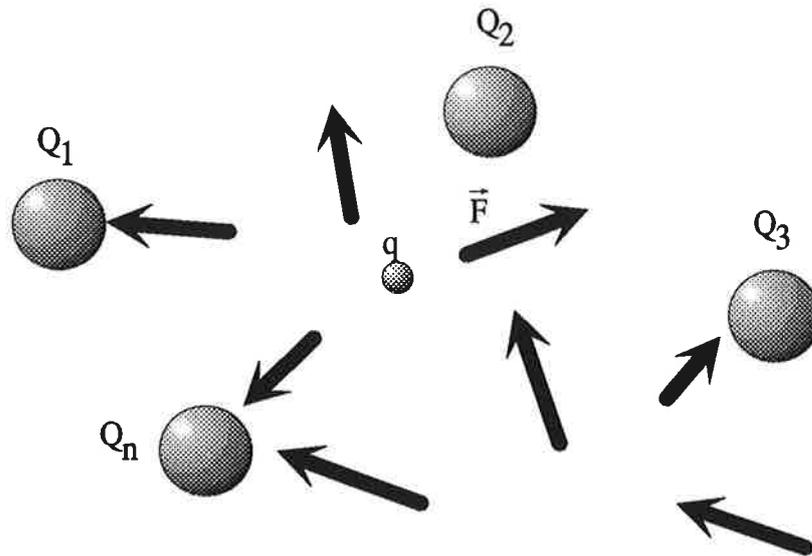


Fig. 2.2

$$\vec{E} = \vec{F} / q \quad [\text{V} / \text{m}] \quad (2.2)$$

## 2.3 Champ de déplacement électrique

Le champ électrique défini au paragraphe 2.2 dépend de la matière dans laquelle sont placées les charges. On définit le *champ de déplacement électrique* par le quotient du champ électrique par la permittivité  $\epsilon$ .

$$\vec{D} = \frac{\vec{E}\epsilon}{\epsilon} = \frac{\vec{E} \epsilon_0 \epsilon_r}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad [\text{As/m}^2] \quad (2.3)$$

avec  $\epsilon_0$  : permittivité  $8,854 \cdot 10^{-12}$  [As/Vm]

$\epsilon_r$  : permittivité relative [1]

Le tableau 2.1 donne la valeur de  $\epsilon_r$  pour différents matériaux.

Matériaux	$\epsilon_r$ à 1kHz	$\epsilon_r$ à 3 GHz
Alumine	8,83	8,79
Porcelaine	5,36	-----
Quartz	3,78	3,78
Résine époxy	3,67	3,09
Polystyrène expansé	1,03	1,03
Bakélite	4,74	3,70
Polyéthylène	2,26	2,26
Polystyrène	2,56	2,55
Caoutchouc naturel	2,60	2,40
Mica	5,40	5,40
Eau distillée	80,00	76,70

Tableau 2.1

#### 2.4 Champ électrique produit par n charges ponctuelles

D'après les définitions des paragraphes 2.1 et 2.2, le champ électrique produit par une charge ponctuelle Q, située au centre du repère, s'exprime en coordonnées sphériques par:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{u}_r \quad [\text{V/m}] \quad (2.4)$$

Cette relation est généralisable à n charges ( $Q_1$  à  $Q_n$ ) repérées dans le système de coordonnées sphériques par les vecteurs  $\vec{r}_i$  (cf. fig. 2.3).

Le principe de superposition est applicable dans ce cas; en effet les forces qui définissent le champ électrique sont additives et on peut généraliser l'équation 2.4 en écrivant:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3} \quad [\text{V/m}] \quad (2.5)$$

ou  $\vec{r}_i$  représente le vecteur position de la charge  $Q_i$   
et  $\vec{r}$  le vecteur position (coordonnées sphériques)

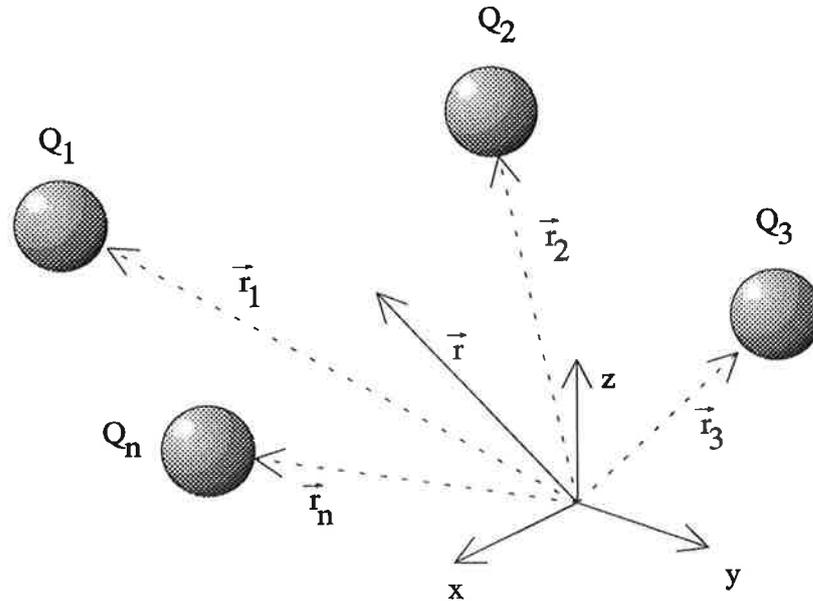


Fig. 2.3

### 2.5 Potentiel produit par n charges ponctuelles

Dans le cas d'une seule charge, l'intégration de l'équation 2.4 donne:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} + C \quad [\text{V}] \quad (2.6)$$

avec C qui représente une constante d'intégration que l'on peut choisir de façon arbitraire (ce choix définissant le lieu du potentiel nul).

De manière analogue, l'intégration de 2.5 permet de définir le potentiel produit par n charges ponctuelles :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|} + C \quad [\text{V}] \quad (2.7)$$

### 2.6 Flux du champ électrique

Par définition le flux  $\psi$  du champ électrique, à travers une surface S, est déterminé par l'intégrale de surface de ce dernier (eq. 2.8 et fig.2.4).

$$\psi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad [\text{Vm}] \quad (2.8)$$

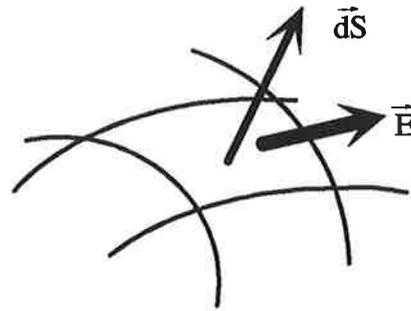


Fig 2.4

## 2.7 Théorème de Gauss

Ce théorème s'énonce de la façon suivante: le flux du champ électrique produit par une charge (ou un ensemble de charges) à travers une *surface fermée*  $S$  est égal, à une constante  $1/\epsilon$  près, à la charge enfermée par cette surface.

$$\psi = Q/\epsilon \quad [\text{Vm}] \quad (2.9)$$

Cette relation se démontre de la façon suivante: on considère le champ électrique produit par une charge ponctuelle enfermée par une surface  $S$  quelconque. L'expression du champ électrique (2.4) combinée avec la définition du flux (2.8) permet d'écrire:

$$\psi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{u}_r \cdot d\vec{S} \quad (2.10)$$

Cette relation doit être valable pour toute surface fermée, en particulier pour une sphère de rayon  $r$  centrée à l'origine du système de coordonnées. Dans ces conditions, le produit scalaire  $\vec{u} \cdot d\vec{S}$  se limite à un produit de deux grandeurs scalaires, puisque ces deux vecteurs sont parallèles. On obtient donc:

$$\psi = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \oiint_S dS \quad (2.11)$$

L'intégrale sur la surface de la sphère de l'élément  $dS$  exprime la surface de cette sphère, donc:

$$\psi = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon} \quad (2.12)$$

Ce théorème est d'une grande utilité puisqu'il permet, en relation avec l'équation 2.8, de calculer le champ électrique produit par un ensemble de charges, ceci pour autant que l'on puisse définir une surface simple qui permette de simplifier l'opération d'intégration.

### Remarque:

La démonstration ci-dessus fait intervenir une charge ponctuelle enfermée par une surface  $S$ . On peut sans autre généraliser à un ensemble de charges en choisissant

comme surface d'intégration, une sphère de rayon suffisamment grand pour pouvoir considérer l'ensemble des charges comme une charge ponctuelle.

## 2.8 Flux et théorème de Gauss sur le champ de déplacement électrique

De la même manière qu'au paragraphe 2.7, on définit le flux du champ de déplacement électrique à travers une surface fermée  $S$  par :

$$\Psi_D = \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (2.13)$$

En faisant usage de la relation (2.3) entre le champ électrique et le champ de déplacement électrique, on obtient :

$$\Psi_D = Q \quad [C] \quad (2.14)$$

Les équations 2.13 et 2.14 permettent d'écrire:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad (2.15)$$

En faisant usage du théorème de la divergence (cf. chapitre 1) on trouve:

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \, dV = \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad (2.16)$$

En effectuant la dérivée sur le volume  $V$  on obtient finalement:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{\partial Q}{\partial V} = \rho_v \quad (2.17)$$

avec  $\rho_v$  qui représente la densité volumique de charges (cf. paragraphe 2.11).

### Remarque:

Les équations 2.15 et 2.16 décrivent la relation entre le champ de déplacement électrique et la charge sous forme globale (2.15) et sous forme locale, c'est-à-dire en un point, (2.17). Il s'agit des deux formes possibles de l'une des quatre équations de Maxwell.

## 2.9 Tension et potentiel

De par la définition du potentiel, on a:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (2.18)$$

en calculant l'intégrale curviligne de cette expression on trouve:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = V_A - V_B \quad [\text{V}] \quad (2.19)$$

ou  $V_A$  et  $V_B$  représentent respectivement les potentiels aux points A et B. On appelle *tension électrique*  $U_{AB}$  entre les points A et B la différence de potentiel entre ces deux points.

$$U_{AB} = V_A - V_B \quad [\text{V}] \quad (2.20)$$

On constate que la différence de potentiel entre deux points (tension) est indépendante du chemin d'intégration choisi (fig 2.5).

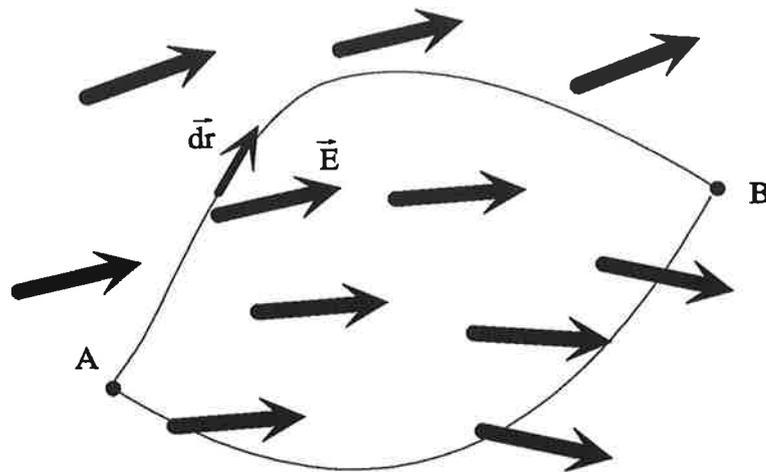


Fig. 2.5

### Remarques:

a) Le potentiel n'est défini que si le rotationnel du champ électrique est nul; cette condition correspond (cf. chapitre 3) à la situation où il n'y a pas de champ magnétique variable dans le temps (phénomène d'induction magnétique). On constate que cette condition est toujours remplie en électrostatique; en effet, le mouvement des charges (courant) étant nul, il n'a pas de champ magnétique induit, donc pas de variation dans le temps de ce dernier.

b) Le calcul de la tension s'effectue de manière similaire à celui du travail nécessaire pour déplacer, sans frottement, une masse dans un champ de gravitation. Dans ce cas également, le travail ne dépend que des points de départ et d'arrivée et non du chemin choisi.

## 2.10 Equipotentiellles et lignes de champ

Par définition, les équipotentiellles sont définies par l'ensemble des courbes le long desquelles le potentiel est identique. En calculant l'expression 2.19 le long d'une équipotentielle C, on obtient :

### 2.10 Equipotentielles et lignes de champ

Par définition, les équipotentielles sont définies par l'ensemble des courbes le long desquelles le potentiel est identique. En calculant l'expression 2.19 le long d'une équipotentielle C, on obtient :

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (2.21)$$

Cette relation indique que le produit scalaire du champ électrique par le vecteur direction de l'équipotentielle est toujours nul, donc que ces deux vecteurs sont perpendiculaires. Les lignes de champ sont, par définition, parallèles au champ électrique; on en conclut que les lignes de champ sont perpendiculaires aux équipotentielles.

### 2.11 Densités de charges

Dans les paragraphes ci-dessus, on a toujours considéré une ou plusieurs charges ponctuelles. Afin de pouvoir aborder différents types de problèmes qui ne peuvent être ramenés à l'étude d'un ensemble de charges, on introduit la notion de *distributions continues de charges* sur une, deux ou trois dimensions. On définit ainsi

la densité de charge linéique  $\rho_l$  en coulombs/m

la densité de charge surfacique  $\rho_s$  en coulombs/m<sup>2</sup>

la densité de charge volumique  $\rho_v$  en coulombs/m<sup>3</sup>

la première grandeur chiffre la valeur de la charge par unité de longueur; la seconde, la valeur de la charge par unité de surface et la dernière, la valeur de la charge par unité de volume. On vérifie sans peine les relations suivantes:

$$\int_C \rho_l dl = Q \quad (2.22)$$

$$\iint_S \rho_s dS = Q \quad (2.23)$$

$$\iiint_V \rho_v dV = Q \quad (2.24)$$

### 2.12 Charges dans un milieu conducteur

On définit par *conducteur* un milieu dans lequel les charges sont capables de se déplacer librement. De par la définition même de l'électrostatique, il ne peut exister de mouvement global de charges dans un conducteur; on en déduit que le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur est obligatoirement nul. En effet, si tel n'était pas le cas, le champ électrique interne exercerait une force sur les charges et ces dernières se déplaceraient. Le champ interne étant nul, le flux de ce dernier est nul également (éq. 2.8) et le théorème de Gauss (éq. 2.9) permet d'affirmer que la charge

globale à l'intérieur du conducteur est nulle. Lorsqu'un conducteur est chargé, sa charge se répartit donc en surface.

Une illustration plus intuitive de ceci est de se représenter les charges (mobiles par définition) à l'intérieur du conducteur. En supposant une charge négative (excédant d'électrons) on constate de par la loi de Coulomb (éq. 2.1) que ces charges se repoussent mutuellement. Elles vont donc s'éloigner jusqu'à être arrêtées par les parois du conducteur.

En ce qui concerne le potentiel, l'intégration de (2.18) sur un champ électrique nul montre que le potentiel ne peut qu'être constant à l'intérieur du conducteur.

Remarque :

Le terme *global* est utilisé ci-dessus dans le sens où l'on ne s'intéresse pas à la structure atomique de la matière. Il est bien clair que, localement des atomes perdent leurs électrons de conduction et que, localement, ces derniers forment des charges négatives alors que les atomes forment des charges positives. Cependant, la charge globale reste nulle.

Propriétés des milieux conducteurs en électrostatique :

- la charge se répartit à la surface du conducteur (densité surfacique de charge)
- le champ électrique est nul à l'intérieur du conducteur
- le potentiel est constant à l'intérieur du conducteur
- la surface du conducteur est une équipotentielle
- les lignes de champ sont perpendiculaires à la surface du conducteur

2.13 Capacité entre deux conducteurs

On considère un ensemble de deux conducteurs (appelés *électrodes*) isolés par un milieu de permittivité  $\epsilon_r$  sur lesquels on applique une tension  $U$  (fig. 2.6).

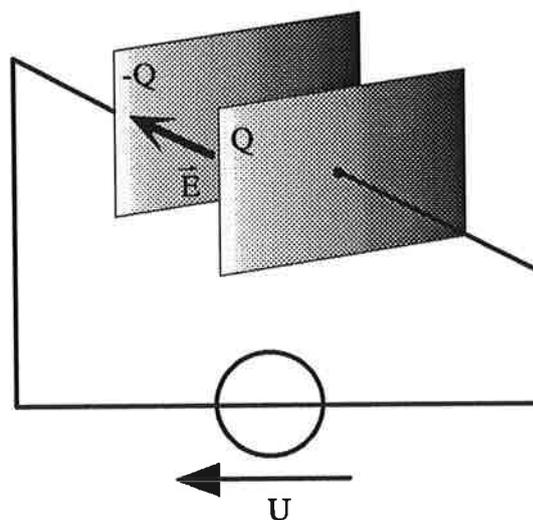


Fig. 2.6

La différence de potentiel existant aux bornes de la source de tension a pour effet de charger les deux électrodes, une positivement, l'autre négativement. La valeur de cette charge dépend, d'une part de la tension appliquée aux électrodes et, d'autre part de la géométrie de ces électrodes. On peut illustrer ce dernier point à l'aide de l'exemple suivant: si l'on considère que les deux électrodes se rapprochent, ceci à tension  $U$  constante, le champ électrique augmente (éq. 2.19). Comme le champ électrique est proportionnel à la charge, cette dernière augmente également.

On définit la *capacité* propre aux deux électrodes et au milieu qui les entoure par le quotient de la charge par la tension  $U$  (2.25).

$$C = \frac{Q}{U} \quad [F] \quad (2.25)$$

#### 2.14 Capacité plane

Soit l'ensemble de deux électrodes illustré à la figure 2.7; on cherche à déterminer la capacité présentée par l'ensemble.

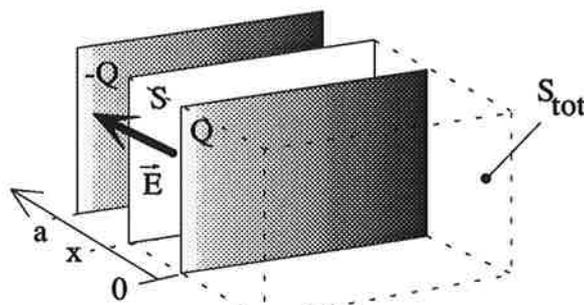


Fig. 2.7

Il est tout d'abord nécessaire de calculer la tension apparaissant entre les électrodes. Ce calcul s'effectue en appliquant le théorème de Gauss sur la surface fermée  $S$ . Cette surface est choisie avec une face parallèle aux électrodes.

Afin de simplifier le calcul, on fait les hypothèses suivantes:

- le champ électrique est non nul uniquement entre les deux électrodes
- le champ électrique est partout perpendiculaire aux électrodes
- le champ électrique est constant

Les deux premières hypothèses reviennent à négliger l'effet des bords des électrodes; la dernière exprime le fait que la permittivité du milieu isolant est constante (milieu homogène).

Le théorème de Gauss (2.9) et la définition du flux (2.8) permettent d'écrire:

$$\oiint_{S_{\text{tot}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon} \quad (2.26)$$

où  $S_{\text{tot}}$  représente l'ensemble de la surface (y compris les bords). Comme le champ électrique est constant et parallèle aux électrodes et nul ailleurs, on peut simplifier l'expression 2.26

$$E S = Q/\epsilon \quad (2.27)$$

on en déduit que le champ électrique vaut:

$$E = Q/\epsilon S \quad (2.28)$$

La tension se calcule à l'aide de 2.19 et on obtient:

$$U = \int_0^a \vec{E} \cdot d\vec{x} = \frac{Qa}{\epsilon S} \quad (2.29)$$

La capacité vaut donc:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon S}{a} \quad [\text{F}] \quad (2.30)$$

### 2.15 Capacité coaxiale

Par une démarche analogue à celle exposée au paragraphe précédent, on peut calculer la capacité présentée par deux conducteurs coaxiaux (fig.2.8). La surface d'intégration  $S$  est ici un tube; les hypothèses concernant l'homogénéité du diélectrique et les effets de bords sont les mêmes que ci-dessus.

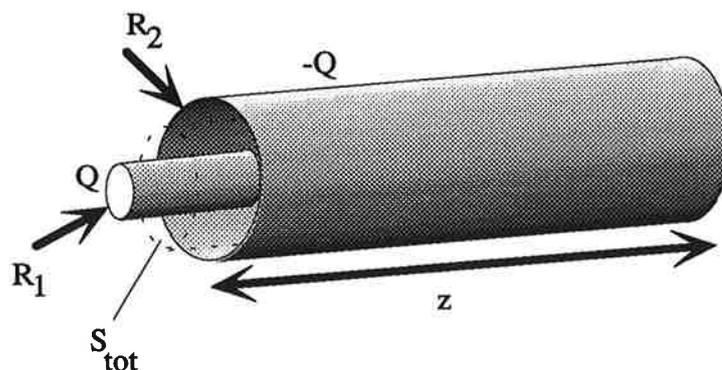


Fig. 2.8

La valeur de la capacité est donnée par:

$$C = \frac{2\pi\epsilon z}{\ln(R_2/R_1)} \quad [\text{F}] \quad (2.31)$$

2.16 Capacité sphérique

La démarche est identique à celle utilisée dans les deux paragraphes ci-dessus (fig 2.9) En prenant pour diélectrique un milieu homogène, on trouve:

$$C = \frac{4\pi\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad [\text{F}] \quad (2.32)$$

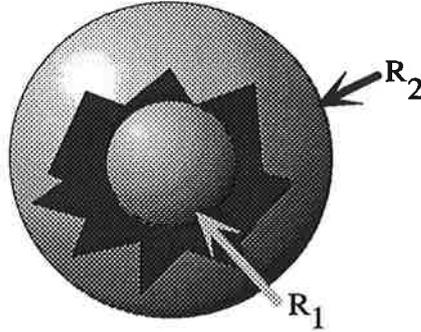


Fig. 2.9

2.17 Capacité bifilaire

Ici également, la méthode de calcul est semblable à celle utilisée ci-dessus; la principale difficulté résidant dans l'impossibilité de définir une surface commune aux deux conducteurs. On peut contourner ce problème en supposant un espacement  $d$  entre les conducteurs très grand face à leur rayon, ce qui permet de négliger le fait que le champ électrique n'est pas radial par rapport aux électrodes. On définit alors deux surfaces  $S_d$  et  $S_g$  qui permettent d'approximer le champ électrique à l'aide du théorème de Gauss comme dans les exemples des paragraphes ci-dessus. Le reste du calcul est alors identique.

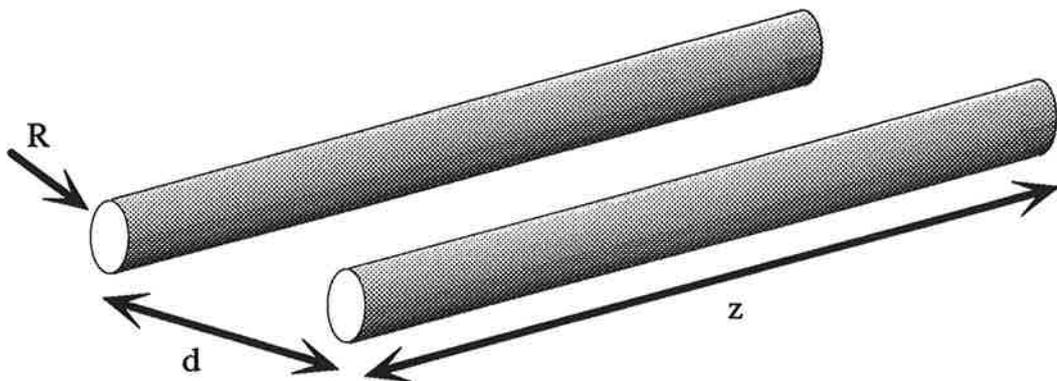


Fig. 2.10

La valeur de la capacité vaut alors:

$$C = \frac{\pi\epsilon z}{\text{ar cosh}(d/R)} \quad [\text{F}] \quad (2.33)$$

## 2.18 Méthodes d'évaluation du potentiel

Les exemples ci-dessus illustrent clairement que, même pour un ensemble simple de charges, le calcul du potentiel peut devenir très difficile, voir impossible par voie analytique. Le but des deux méthodes présentées ci-dessous est de permettre une évaluation du potentiel même dans les cas où l'intégration du gradient de ce dernier ne présente pas de solution analytique.

### a) Méthode graphique de Lehmann

Cette méthode, qui ne nécessite aucun calcul, est basée sur une approche graphique. Malgré la simplicité des moyens mis en oeuvre, les résultats donnent une approximation suffisamment précise du problème considéré, ceci pour autant que la *démarche ait été suivie avec soin*.

Cette méthode, qui revient à résoudre de façon visuelle les équations de l'électrostatique, s'énonce comme suit:

- 1) Tracer le contour des électrodes (équipotentiellles).
- 2) Esquisser (à main levée) les équipotentiellles correspondant à la demi différence de potentiel, au quart ...
- 3) Esquisser les lignes de champ qui doivent être perpendiculaires aux équipotentiellles.
- 4) Répéter, de façon *itérative* les points 2) et 3) jusqu'à obtenir un réseau de *carrés curvilignes* c'est-à-dire un réseau de surfaces dont les quatre côtés sont sensiblement égaux.

### Remarques :

- En fonction de la géométrie du problème, il peut être préférable d'intervertir les points 2) et 3).
- Lors de l'exécution des points 2) ou 3) il importe de garder à l'esprit que l'on cherche à obtenir un ensemble de courbes orthogonales.
- Il n'est pas toujours nécessaire d'esquisser les lignes de champ et les équipotentiellles sur l'ensemble du problème mais il importe de définir cet ensemble de façon complète dans la région qui présente un intérêt.
- La notion de carrés curvilignes (point 4) est utile pour pouvoir dessiner un ensemble de courbes orthogonales, et, de ce fait, son rôle est important. Cette notion n'a par contre aucune réalité physique.

### Exemple

L'exemple de la figure 2.11 illustre les différentes étapes de cette méthode. En a) on voit le premier tracé des équipotentiellles; en b) les lignes de champs sont tracées et on constate qu'elles ne sont pas orthogonales en tout point. La figure 2.11 c) illustre le résultat final obtenu après plusieurs affinements successifs de la figure 2.11 b).

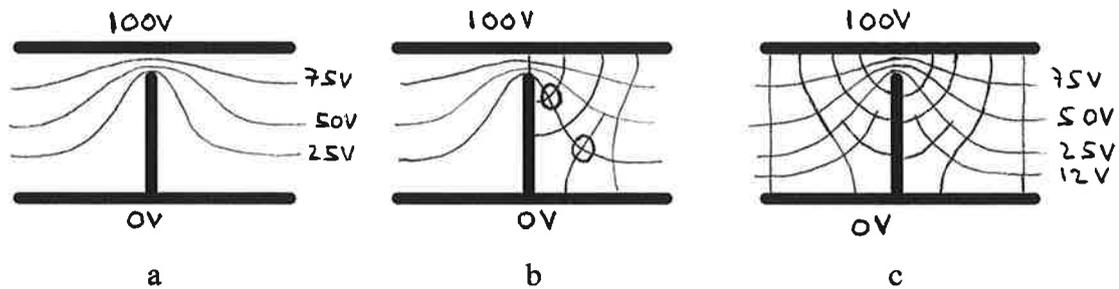


Fig. 2.11

### b) Méthode des différences finies

Cette méthode se base sur une approximation *linéaire* des équations différentielles associées au calcul du potentiel. Elle comporte deux étapes: la première approxime les équations différentielles et la seconde résout le système d'équation proposé par la première. Si l'on désire obtenir un résultat suffisamment proche de la réalité, le volume de calcul exigé par cette méthode est élevé et il est nécessaire d'utiliser un ordinateur

#### première étape

- 1) Définir une grille orthogonale et régulière présentant une trame petite (facteur 10 au moins) face à la plus petite dimension intervenant dans le problème.
- 2) Pour chaque point de la grille, approximer le potentiel en ce point par la *moyenne arithmétique* des points voisins. Ces points sont au nombre de quatre dans le cas d'un problème à deux dimensions et au nombre de six en trois dimensions. On obtient ainsi autant d'équations qu'il y a de points sur la grille.

#### deuxième étape

Cette étape consiste à résoudre le système de  $N$  équations à  $N$  inconnue; le nombre de points étant généralement très élevé, la résolution par voie itérative est préférable à la méthode directe.

- 4) Imposer des valeurs arbitraires aux potentiels inconnus et des valeurs fixes aux potentiels des électrodes.
- 5) Calculer une nouvelle matrice de potentiels en utilisant les équations définies au point 3).
- 6) Répéter le point 5) tant que l'amélioration de la valeur du potentiel est jugée suffisante.

#### Remarques :

- Le choix du pas de la grille est déterminant pour la précision du résultat pour tous les problèmes ou la distribution du potentiel n'est pas linéaire.
- Pour les problèmes qui présentent une ou plusieurs directions non finies on considère que le potentiel très loin de l'objet à étudier reste constant.

Exemple

La figure 2.12 présente l'objet dans lequel on se propose de calculer le potentiel. La grille est choisie ici avec un pas beaucoup trop grand mais ceci permet d'illustrer la résolution en effectuant un volume de calcul restreint.

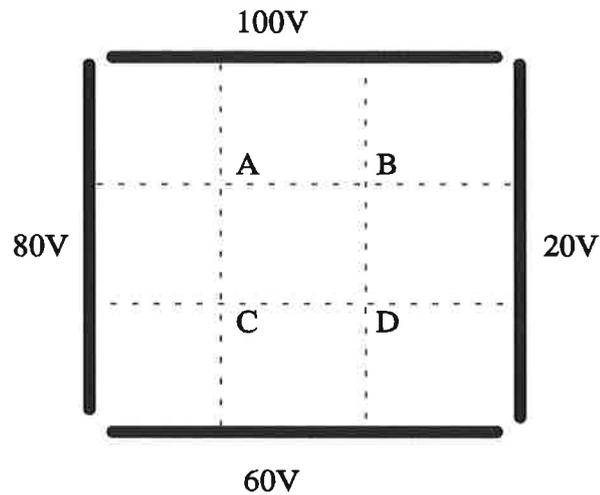


Fig. 2.12

Les équations associées sont:

$$\begin{aligned}
 V_A &= (V_B + V_C + 80 + 100)/4 \\
 V_B &= (V_A + V_D + 100 + 20)/4 \\
 V_C &= (V_A + V_D + 80 + 60)/4 \\
 V_D &= (V_B + V_C + 20 + 60)/4
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$

En prenant les potentiels inconnus nuls pour la première itération on obtient:

itération	1	4	5	exact
potentiel				
$V_A$	45,0	76,8	77,3	77,5
$V_B$	41,3	62,2	62,4	62,5
$V_C$	46,3	67,2	67,4	67,5
$V_D$	41,9	52,3	52,5	52,5

## Chapitre 3

### ELECTRODYNAMIQUE

#### Table des matières

3.	Introduction	page 3.1
3.1	Courant électrique	page 3.1
3.2	Densité de courant	page 3.1
3.3	Puissance et énergie	page 3.1
3.4	Pertes Joules	page 3.2
3.5	Résistance électrique	page 3.2
3.6	Loi d'Ohm sous forme globale	page 3.3
3.7	Loi d'Ohm localisée	page 3.3
3.8	Mobilité des charges et nombre volumique de charges	page 3.3

### 3. Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des charges en mouvement dans les conducteurs, étude qui fait abstraction de l'induction magnétique (cf. chapitre 4) produite par tout déplacement de charge. Par opposition à l'*électrostatique* (chapitre 2) qui ne considère que des charges immobiles on s'intéresse ici à leur mouvement uniquement et on définit cet ensemble de problèmes par l'*électrodynamique*.

#### 3.1 Courant électrique

Lorsque un champ électrique est appliqué à un conducteur, les charges électriques contenues dans ce dernier sont soumises à une force (2.2 et 2.1). Comme ces charges sont susceptibles de se déplacer, cette force se traduit par un déplacement des charges. On définit le *courant électrique* par la quantité de charges  $q$  par unité de temps, autrement dit par le débit de charges à l'intérieur du conducteur (3.1)

$$i(t) = \frac{\partial q(t)}{\partial t} \quad (3.1)$$

#### 3.2 Densité de courant

La *densité de courant* est définie par le courant par unité de surface de la section du conducteur; cette grandeur s'exprime par (3.2)

$$\vec{J}(t) = \frac{\partial i(t)}{\partial S} \cdot \vec{u}_r \quad (3.2)$$

Inversement, si l'on intègre (sommation) la densité de courant sur toute la surface de la section du conducteur, on obtient la valeur du courant (3.3)

$$i(t) = \iint_S \vec{J}(t) \cdot d\vec{S} \quad (3.3)$$

**Remarques:** La *densité de courant* est une grandeur *vectorielle* dont le sens et la direction sont définis par la vitesse (vectorielle) des charges élémentaires *positives*. Ce sens est donc opposé à celui des électrons dans un métal.

Le *courant* est une grandeur *scalaire* qui correspond au *flux* (intégrale de surface) de la densité de courant.

#### 3.3 Puissance et énergie

L'énergie  $W_{AB}$  nécessaire pour déplacer, dans un champ électrique, une charge  $Q$  du point A au point B se calcule par l'expression suivante (3.4)

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B Q\vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (3.4)$$

Les relations 2.19 et 2.20 permettent d'écrire

$$W_{AB} = QU_{AB} \quad (3.5)$$

Par définition de la puissance, on obtient

$$P = \frac{\partial W_{AB}}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} U_{AB} = U_{AB} I \quad (3.6)$$

### 3.4 Pertes Joules

Lors de leur déplacement dans la matière, les charges électriques entrent en collision avec le réseau atomique avec pour effet une augmentation de l'énergie cinétique de ce dernier. Cette augmentation de l'agitation atomique se traduit par un échauffement de la matière que l'on appelle *effet Joules*. On constate expérimentalement que la puissance transformée est proportionnelle au carré du courant (3.7)

$$P \propto I^2 \quad (3.7)$$

Par définition, on appelle le facteur de proportionnalité liant la puissance électrique au carré du courant la *résistance électrique* R (ou simplement résistance)

$$P = RI^2 \quad (3.8)$$

### 3.5 Résistance électrique

On constate de façon expérimentale que la résistance électrique est:

- proportionnelle à la longueur l du conducteur
- inversement proportionnelle à la surface S du conducteur
- fonction de la matière constitutive du conducteur

On a la relation générale suivante

$$R = \int_A^B \frac{\rho dr}{S} \quad (3.9)$$

avec le facteur  $\rho$  qui est propre à la matière conductrice. On nomme ce facteur la *résistivité* et son inverse (noté à l'aide de la lettre  $\sigma$ ) la *conductivité*. Les unités de ces deux grandeurs sont, respectivement, des  $\Omega m$  et des  $(m\Omega)^{-1}$ .

Dans le cas d'un conducteur homogène, la relation 3.9 se simplifie et devient

$$R = \frac{\rho l}{S} \quad (3.10)$$

### 3.6 Loi d'Ohm (forme globale)

En égalant les équations 3.6 et 3.8 on obtient la relation ci-dessous qui est la *loi d'Ohm* sous sa forme globale.

$$U = RI \quad (3.11)$$

### 3.7 Loi d'Ohm localisée

En remplaçant la tension par sa définition (2.19 et 2.20) dans la loi d'Ohm, puis en remplaçant la résistance par la relation 3.9 on obtient:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = RI = \int_A^B \frac{\rho d\vec{r}}{S} I \quad (3.12)$$

En faisant intervenir la définition de la densité de courant (3.2) et en dérivant par rapport à la surface  $S$ , on trouve:

$$\vec{E} = \rho \vec{J} \quad (3.13)$$

ou

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (3.14)$$

qui est la forme *localisée* de la loi d'Ohm.

### 3.8 Mobilité des charges et nombre volumique de charges

Dans certains types de problèmes et plus particulièrement dans ceux qui traitent de la physique du semi-conducteur, on est appelé à considérer le mouvement de chaque charge élémentaire. Il convient de préciser ici que, ce faisant, on déroge aux hypothèses faites concernant le modèle de l'électrophysique dans lequel les charges ne sont pas considérées de façon isolée. Sans entrer dans les détails des différents développements (qui font appel aux notions de la physique du solide) on peut mentionner les points suivants:

#### a) Mobilité des charges

La mobilité d'une charge dans un conducteur (ou semi-conducteur) parcouru par un courant est définie par le quotient de la vitesse de la charge par le champ électrique

$$\mu_n = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{E}\|} \quad [m^2 / Vs] \quad (3.15)$$

Le tableau ci-dessous indique les valeurs de la mobilité électronique pour quelques matériaux:

Métal	mobilité $10^{-3} \text{ m}^2/\text{Vs}$
Cu	3,5
Al	1,5
Au	3,3
Ag	6,3

b) Nombre volumique de charges

On définit le nombre volumique de charges  $n$  par le nombre de charges libres (donc susceptibles de produire un courant électrique) par unité de volume. Ce nombre dépend de la matière considérée et est de l'ordre de  $10^{29}$  charges par mètre cube ( $1,16 \cdot 10^{29}$  pour le cuivre).

On a la relation suivante entre la densité de courant et la vitesse des charges:

$$\vec{J} = nQ\vec{v} \quad (3.16)$$

En introduisant la mobilité (3.15) on peut écrire:

$$\vec{J} = nQ\mu_n \vec{E} \quad (3.17)$$

En identifiant avec 3.13, on obtient la relation:

$$\sigma = nQ\mu_n \quad (3.18)$$

Commentaire

La relation 3.18 peut laisser penser que la conductivité (donc la résistance !) est dépendante du champ électrique puisque la mobilité dépend de ce dernier (3.15). En réalité, il convient de distinguer deux types de vitesse pour les charges libres:

La *vitesse de dérive* qui est la vitesse moyenne des charges. C'est donc elle qui détermine le courant. Elle correspond à la vitesse utilisée dans les relations 3.15 et 3.16.

La *vitesse thermique* qui est la vitesse instantanée des charges. En effet, les charges ne se déplacent pas de façon régulière et rectiligne dans la matière. Leur trajectoire est aléatoire, ceci étant dû aux chocs avec le réseau atomique (agitation thermique).

On peut montrer que, même sous de forts champs électriques, donc dans le cas de densités de courant élevées (de l'ordre de  $10^7 \text{ A/m}^2$ ), la vitesse de dérive reste de l'ordre de  $10^{-7}$  fois la vitesse thermique. La vitesse des charges est donc principalement de nature thermique, ceci quelque soit le courant qui parcourt la

matière. Ceci signifie donc que, quelque soit le courant, la vitesse des charges reste pratiquement constante !

En considérant, à titre d'exemple, un conducteur en cuivre avec une densité de courant de  $1,86 \cdot 10^7 \text{ A/m}^2$  (ce qui est très élevé) on obtient une vitesse de dérive de  $10^{-3} \text{ m/s}$  et une vitesse thermique de  $1,1 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ .

Ceci permet donc d'affirmer que la conductivité ne dépend pas du champ électrique, et que la loi d'Ohm est linéaire contrairement à ce que l'équation 3.15 aurait pu laisser penser.

## Chapitre 4

### MAGNETOSTATIQUE

#### Table des matières

4.1	Introduction	page 4.1
4.2	Loi d'Ampère	page 4.1
4.3	Champ d'induction magnétique	page 4.2
4.4	Forces de Laplace et Lorentz	page 4.2
4.5	Champ magnétique	page 4.3
4.6	Potentiel magnétique	page 4.3
4.7	Flux d'induction magnétique	page 4.3
4.8	Réductance et perméance magnétique	page 4.4
4.9	Circulation magnétique (théorème d'Ampère)	page 4.4
4.10	Circuits magnétiques	page 4.5
4.11	Inductance propre	page 4.7
4.12	Potentiel vecteur magnétique	page 4.8
4.13	Loi d'Ampère appliquée au potentiel vecteur magnétique	page 4.8

#### 4.1 Introduction

L'expérience sur les particules chargées montre qu'il existe des forces d'une autre nature que les forces électrostatiques mais qui ont une expression similaire. On parle de *forces magnétiques*. Par une démarche analogue à celle faite en électrostatique, on est amené à définir les champs magnétique et d'induction magnétique. Dans ce qui suit, on ne s'intéresse qu'aux champs invariants dans le temps (*magnétostatique*), ce qui permet de négliger les effets d'induction électromagnétique et de propagation d'onde, effets qui seront abordés dans le chapitre 5.

#### 4.2 Loi d'Ampère

On constate expérimentalement que deux conducteurs parallèles parcourus par un courant électrique exercent mutuellement une force l'un sur l'autre. L'intensité de cette force dépend du courant, de la distance qui sépare les conducteurs, de leur longueur et de la matière dans laquelle a lieu l'expérience. Le sens des forces dépend, quant à lui, du sens du courant dans chaque conducteur: si le courant est de sens identique dans les deux conducteurs, les forces sont attractives; elles sont répulsives dans le cas de courants de sens opposés (figure 4.1 et équation 4.1).

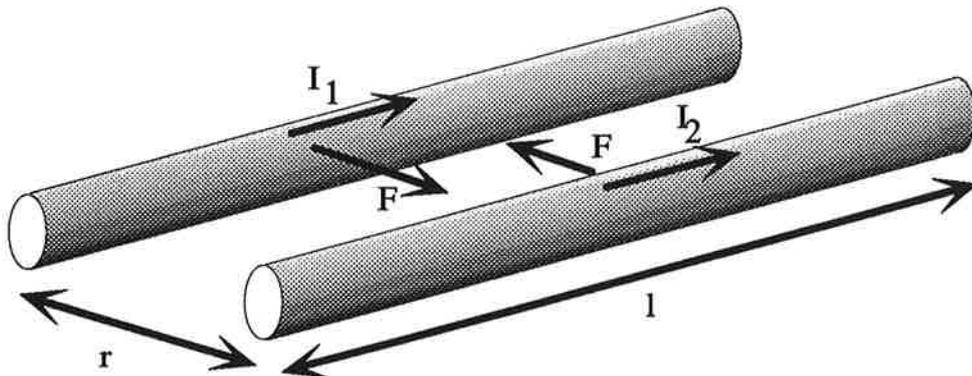


Fig 4.1

$$\vec{F} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2 l}{r} \vec{u}_\varphi \quad (4.1)$$

avec  $I_1$  et  $I_2$  qui représentent les courants dans chaque conducteur

$l$  qui représente la longueur des conducteurs

$r$  la distance séparant ces conducteurs

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

On appelle *perméabilité* la grandeur  $\mu$ , *perméabilité absolue* la grandeur  $\mu_0$  et *perméabilité relative* la grandeur  $\mu_r$ . Cette dernière grandeur dépend de la matière et elle est proche de l'unité pour tous les matériaux non ferromagnétiques. Dans le cas des matériaux ferromagnétiques, sa valeur varie de façon non-linéaire en fonction du champ magnétique et présente un effet d'hystérèse plus ou moins marqué (diagramme B-H).

L'unification du système d'unités amène à définir une valeur de  $4\pi 10^{-7}$  pour la perméabilité absolue ( $\mu_0$ ) dont les dimensions s'expriment en H/m ou en Vs/Am.

#### 4.3 Champ d'induction magnétique

Par une démarche analogue à celle effectuée en électrostatique, on associe au champ de force un champ vectoriel appelé *champ d'induction magnétique* et qui est défini par la relation 4.2

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}}{I_1 l} = \frac{\mu I_2}{2\pi r} \vec{u}_\varphi \quad [T = Vs / m^2] \quad (4.2)$$

Dans le cas d'un conducteur rectiligne parcouru par un courant, l'expérience montre que les lignes du champ d'induction magnétique sont circulaires et concentriques par rapport au conducteur qui les génère. Le sens du champ vectoriel est défini par la règle du tire-bouchon (sens des aiguilles de la montre si le courant entre dans le plan).

#### 4.4 Forces de Laplace et Lorentz

La définition du champ d'induction magnétique (4.2) permet d'écrire

$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B} \quad (4.3)$$

Cette relation est connue sous le nom d'*équation de Laplace*. Si l'on considère un petit élément de conducteur de longueur  $dl$  on obtient:

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B} \quad (4.4)$$

qui est la forme *locale* de l'équation de Laplace.

L'équation de Laplace montre que l'existence de forces magnétiques est liée à la présence d'un courant (donc d'un mouvement de charges) et à la présence d'un champ d'induction magnétique. En s'intéressant aux charges, on est amené à écrire (*force de Lorentz*):

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (4.5)$$

avec  $v$  qui représente la vitesse de la charge  $q$ .

De plus, on sait que les charges exercent des forces de nature électrostatique les unes sur les autres on peut donc généraliser la relation 4.5 en écrivant:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.6)$$

qui est l'expression de la *force de Lorentz généralisée*.

#### 4.5 Champ magnétique

Tout comme le champ électrique en électrostatique, on constate que le champ d'induction magnétique dépend de la matière. On définit, de la même manière, un champ vectoriel parallèle au champ d'induction magnétique, appelé *champ magnétique*, de grandeur indépendante de la matière (4.7).

$$\vec{H} = \vec{B} / \mu \quad [\text{A} / \text{m}] \quad (4.7)$$

**Remarque :** Pour des raisons historiques, et ceci est malheureux pour la compréhension des phénomènes, on a nommé *champ magnétique* le champ vectoriel d'origine magnétique *indépendant de la matière*. A l'inverse (!), en électrostatique, le *champ électrique* définit le champ vectoriel d'origine électrique *dépendant de la matière*.

#### 4.6 Potentiel magnétique

Par analogie avec la définition de la tension et du potentiel, on introduit la notion de potentiel magnétique en posant:

$$\theta_A - \theta_B = \theta_{AB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{r} \quad [\text{A}] \quad (4.8)$$

#### 4.7 Flux d'induction magnétique

Comme dans le cas du flux du champ électrique, le flux d'induction magnétique se calcule en effectuant l'intégrale de surface du champ d'induction magnétique.

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad [\text{Wb} = \text{Vs}] \quad (4.9)$$

On constate expérimentalement que les lignes de champs de l'induction magnétique sont toujours des courbes *fermées*. On en déduit que le calcul du flux de l'induction magnétique sur une surface *fermée* sera toujours nul. On obtient une expression similaire à celle obtenue pour le champ de déplacement (2.15)

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (4.10)$$

En appliquant le théorème de la divergence sur 4.10 on trouve la forme locale de cette relation

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.11)$$

#### 4.8 Réductance et perméance magnétique

En partant de la définition du champ magnétique (4.7) et de celle du potentiel magnétique (4.8) on peut écrire:

#### 4.8 Réductance et perméance magnétique

En partant de la définition du champ magnétique (4.7) et de celle du potentiel magnétique (4.8) on peut écrire:

$$\Theta_{AB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot d\vec{r} \quad (4.12)$$

En effectuant l'intégrale le long d'une ligne de champ de l'induction magnétique et en choisissant une surface S perpendiculaire à cette ligne de champ on obtient:

$$\Theta_{AB} = \int_A^B \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \frac{B \cdot S}{\mu S} dr = \Phi \int_A^B \frac{dr}{\mu S} \quad (4.13)$$

On constate une proportionnalité entre le potentiel magnétique et le flux d'induction. On définit par *réductance magnétique* le facteur de proportionnalité qui lie ces deux grandeurs.

$$R_m = \int_A^B \frac{dr}{\mu S} \quad [A / Vs = H^{-1}] \quad (4.14)$$

avec

$$\Theta_{AB} = R_m \Phi \quad (4.15)$$

La *perméance magnétique* est définie par l'inverse de la réductance:

$$\Lambda = 1/R_m \quad (4.16)$$

#### 4.9 Circulation magnétique (théorème d'Ampère)

Si l'on considère une spire constituée d'un fil conducteur parcouru par un courant I, la relation 4.2 permet de calculer le champ d'induction à une distance r:

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi r} \vec{u}_\varphi \quad (4.17)$$

En calculant le potentiel magnétique produit par cette spire le long d'un cercle de rayon r on trouve:

$$\Theta = \oint_C \frac{I}{2\pi r} dr = I \quad (4.18)$$

donc,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = I = \Theta \quad (4.19)$$

qui est la *loi de la circulation magnétique* ou *théorème d'Ampère*.

De façon générale, si le potentiel magnétique est produit par N spires confondues, le champ d'induction est multiplié par N et le potentiel magnétique également:

$$\Theta = NI \quad (4.20)$$

En appliquant le théorème de Stokes à la relation 4.19 on obtient:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} = I \quad (4.21)$$

et en dérivant cette expression par rapport à la surface on trouve:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{dI}{ds} \frac{\vec{S}}{\|\vec{S}\|} = \vec{j} \quad (4.22)$$

qui est la forme locale de l'expression 4.19.

#### 4.10 Circuits magnétiques

L'équation 4.15 est, de par sa forme, très proche de la loi d'Ohm (3.11); de même, la définition de la réluctance (4.14) est proche de celle de la résistance électrique (3.9). Afin de simplifier l'étude des circuits magnétiques, on fait une analogie formelle entre les phénomènes magnétiques et les phénomènes résistifs en utilisant les relations suivantes:

$$\Theta = NI \quad (4.20)$$

$$\Theta_{AB} = R_m \Phi \quad (4.15)$$

$$R_m = \int_A^B \frac{dr}{\mu S} \quad [A / Vs = H^{-1}] \quad (4.14)$$

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad [Wb = Vs] \quad (4.9)$$

En supposant que le champ d'induction magnétique est perpendiculaire à la section des pièces magnétiques et que cette section est constante sur la longueur considérée, on peut encore simplifier les deux dernières expressions:

$$R_m = \frac{l}{\mu S} \quad (4.23)$$

$$\Phi = BS \quad (4.24)$$

Lorsque les circuits présentent des coudes, on fait une approximation supplémentaire en considérant que:

- la longueur  $l$  du circuit est définie par une ligne de champ *moyenne*
- les lignes de champs moyennes se coupent à angle droit

Ces deux approximations, quoique grossières, n'influencent que très peu les résultats pratiques et la simplification apportée à la résolution des problèmes magnétiques justifie leur usage.

### Exemple

On désire calculer la valeur du champ d'induction magnétique dans le circuit ci-dessous:

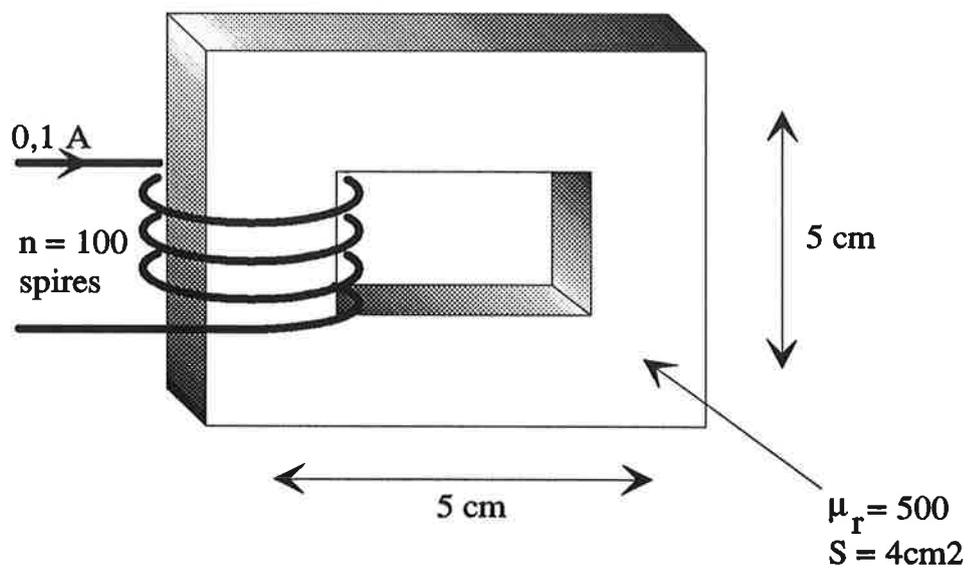


Fig. 4.2

On peut établir le schéma équivalent suivant:

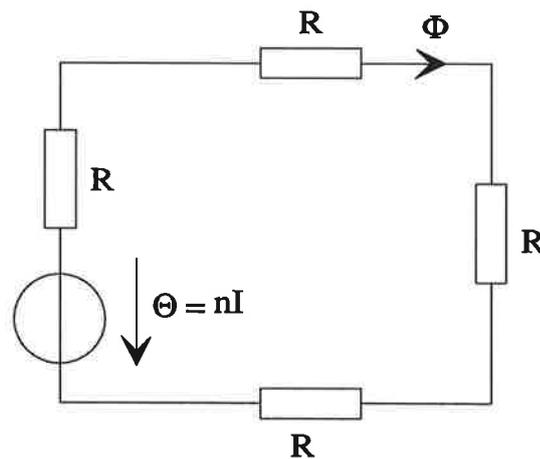


Fig. 4.3

En considérant une longueur moyenne pour chaque côté de 5cm, on trouve pour R:

$$R = 1,99 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

Donc une réluctance totale de

$$R_{\text{tot}} = 4 R = 7,96 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

Le potentiel magnétique est défini par le produit du courant par le nombre de spires soit:

$$\Theta = nI = 10 \text{ A}$$

Le flux est défini par le quotient du potentiel magnétique par la réluctance

$$\Phi = \Theta / R_{\text{tot}} = 1,26 \cdot 10^{-5} \text{ Vs}$$

Le champ d'induction magnétique vaut donc:

$$B = \Phi / S = 3,14 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

#### 4.11 Inductance propre

L'*inductance propre* d'un bobinage est définie par le quotient du flux total par le courant qui produit ce flux:

$$L = \Phi_{\text{tot}} / I = N\Phi / I = N^2 / R_m \quad (4.25)$$

Exemple :

On se propose de calculer l'inductance propre d'une bobine à une seule couche de spires (fig. 4.4):

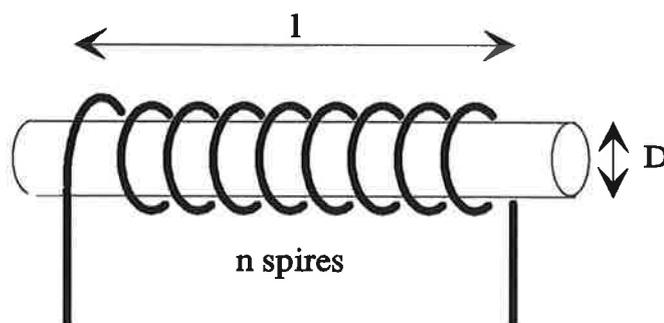


Fig. 4.4

La réluctance magnétique peut se décomposer en deux parties: la réluctance à l'intérieur et à l'extérieur de la bobine.

A l'intérieur, et en supposant la longueur  $l$  grande face au diamètre de la bobine (ceci afin de pouvoir négliger les effets de bords) on peut écrire, sur la base de la relation 4.23 :

$$R_{\text{int}} = \frac{1}{\mu\pi D^2} \quad (4.26)$$

A l'extérieur, la section à considérer est infinie, donc la réluctance extérieure tend vers zéro.

La réluctance totale s'exprime donc par 4.26 et, en faisant intervenir la définition de l'inductance (4.25) on obtient:

$$L = \frac{\mu\pi N^2 D^2}{l} \quad (4.27)$$

#### 4.12 Potentiel vecteur magnétique

La divergence du champ d'induction est nulle (4.11) et, d'autre part, la divergence d'un rotationnel est nulle également on peut donc écrire:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (4.28)$$

donc

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (4.29)$$

on dit que l'induction magnétique dérive du champ vectoriel  $A$  que l'on appelle *potentiel vecteur magnétique*.

**Remarque :** La notion de potentiel est fondamentalement différente de la notion de grandeur scalaire. De façon générale, un champ vectoriel dérive d'un *potentiel scalaire* si le *gradient* de ce dernier permet d'exprimer ce champ. De même, un champ dérive d'un *potentiel vectoriel* si le *rotationnel* de ce dernier définit ce champ.

#### 4.13 Loi d'Ampère appliquée au potentiel vecteur magnétique

En introduisant la notion de potentiel vecteur magnétique (4.29) dans la relation qui lie le champ magnétique à la densité de courant (4.22) on obtient:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (4.30)$$

En faisant usage des propriétés du double rotationnel, on obtient alors

$$\frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \Delta \vec{A}) = \vec{j} \quad (4.31)$$

Comme le potentiel vecteur magnétique n'est défini que par son rotationnel, on peut ajouter la condition suivante sur sa divergence:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (4.32)$$

On obtient alors (*équation vectorielle de Poisson*)

$$\Delta \vec{A} = \mu \vec{J} \quad (4.33)$$

que l'on peut intégrer pour obtenir sa forme globale:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J} dV}{R} \quad (4.34)$$

avec  $R$  qui représente la distance entre l'élément de courant et l'endroit où l'on veut calculer le potentiel vecteur magnétique. Lorsque l'on considère, à la place d'une densité de courant dans un volume  $V$ , un courant  $I$  le long d'un contour  $C$ , l'équation 4.34 devient:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{r}}{R} \quad (4.35)$$

## Chapitre 5

### ELECTROMAGNETISME

#### Table des matières

5.1	Introduction	page 5.1
5.2	Tension induite	page 5.1
5.3	Loi de la tension induite sous forme globale	page 5.2
5.4	Champ magnétique produit par un courant et un déplacement de charges	page 5.3
5.5	Equations de Maxwell	page 5.4
5.6	Equations de Maxwell locales en complexe	page 5.6
5.7	Application des équations de Maxwell: effet de blindage	page 5.6
5.8	Application des équations de Maxwell: effet de pelliculaire	page 5.9
5.9	Vecteur de Poynting	page 5.10

## 5.1 Introduction

L'expérience montre que les champs électrique (chapitre 2) et magnétique (chapitre 4), lorsqu'ils varient dans le temps, ne sont pas indépendants. La tension induite aux bornes d'un transformateur ou la propagation d'une onde électromagnétique en sont un exemple. Ce chapitre aborde la description de cette interdépendance des domaines électrique et magnétique en partant des notions des chapitres précédents, en les complétant et en aboutissant au modèle de Maxwell (*équations de Maxwell*). Cette description est suivie de quelques applications de ces équations à des cas pratiques (effet pelliculaire par exemple).

## 5.2 Tension induite

On constate expérimentalement qu'une variation du flux dans une spire formée par un conducteur génère, aux bornes de cette dernière, une tension appelée *tension induite* (5.1 et figure 5.1 et figure 5.2 pour les limites d'intégration) :

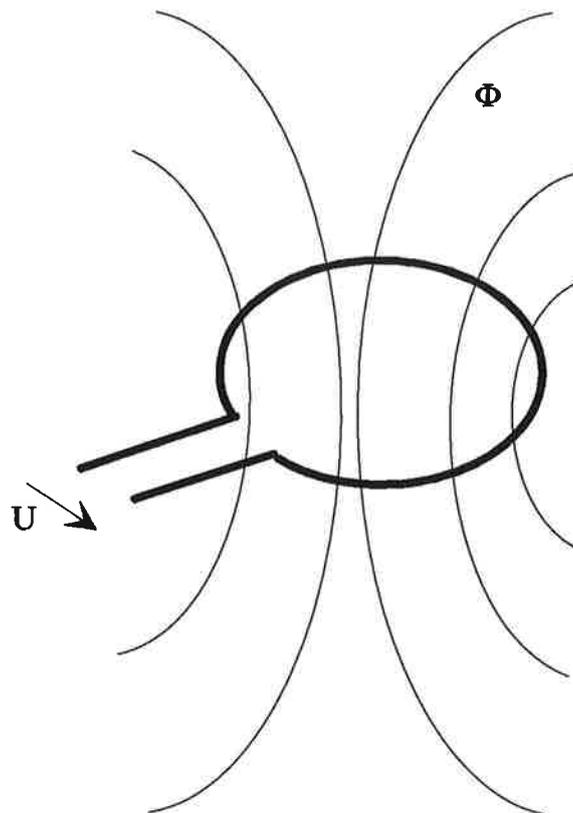


Fig. 5.1

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (5.1)$$

Dans le cas d'un bobinage présentant  $N$  spires, la tension totale est la somme de la tension aux bornes des  $N$  spires, donc:

$$u_{\text{tot}} = Nu = -N \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (5.2)$$

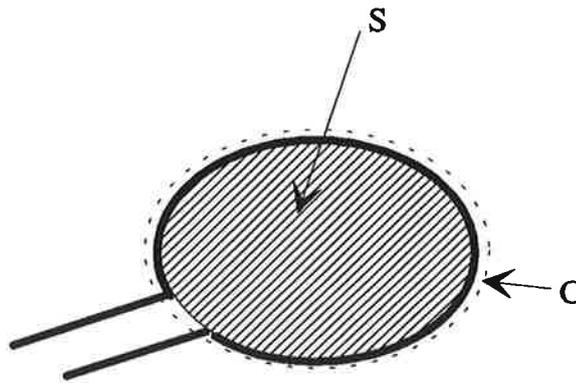


Fig. 5.2

En introduisant la définition de l'inductance (4.25) dans la loi de la tension induite (5.1) et en choisissant convenablement le sens du courant, on obtient la relation entre la tension aux bornes et le courant à travers une bobine:

$$u = L \frac{dI}{dt} \quad (5.3)$$

Dans ce cas, le courant dans la bobine génère un flux d'induction magnétique qui, à son tour génère une tension aux bornes de la bobine. Dans le cas de plusieurs bobines traversées par un flux commun, cette relation reste valable et on parle alors d'*induction mutuelle* et d'*inductance mutuelle* (cf. cours d'électrotechnique chapitre 3).

Remarque :

Sans que ceci soit clairement indiqué (comme au chapitre 3 par exemple) mais par souci de simplicité de lecture des formules, les grandeurs intervenant dans ce chapitre sont des grandeurs susceptibles de varier dans le temps.

### 5.3 Loi de la tension induite sous sa forme globale

En appliquant la définition du flux à la relation 5.1, on trouve:

$$u = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (5.4)$$

Le contour C de la surface S (fig. 5.2) représente le pourtour de la spire; le calcul de la tension le long de la spire s'effectue en intégrant la relation 2.19 le long du contour C. On obtient ainsi la *loi de la tension induite sous sa forme globale*.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (5.5)$$

Cette relation exprime le fait que toute *variation* du champ d'induction magnétique génère un champ électrique. En d'autres termes elle montre que des variations dans le domaine magnétique influence le domaine électrique. On verra ci-dessous que l'effet

inverse existe également et que la combinaison de ces deux effets est à la base de l'explication de la propagation des ondes électromagnétiques.

#### 5.4 Champ magnétique produit par un courant et un déplacement de charges

L'équation 4.21 montre qu'un courant électrique produit un champ magnétique. Si l'on généralise la notion de courant électrique, on peut mettre en évidence deux types de courant électrique:

- un courant d'origine électronique, produit par un mouvement de charges considérées dans le cadre des hypothèses de ce cours comme infiniment petites.

- un courant dû à un déplacement de charges macroscopiques, donc de tailles nettement plus importantes que celle des électrons.

Le premier courant, d'origine électronique, est décrit par la relation 3.3 rappelée ci-dessous:

$$i_e = \iint_s \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (3.3)$$

Le second courant décrit un mouvement de charges  $Q$  donc, d'après l'équation 3.1:

$$i_e = \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (3.1)$$

En faisant intervenir le théorème de Gauss sur le champ de déplacement électrique (relation 2.15), ce courant peut s'écrire:

$$i_e = \iint_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (5.6)$$

Le courant s'exprime de façon générale par la somme des deux courants ci-dessus:

$$i = \iint_s \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s} \quad (5.7)$$

En faisant intervenir la relation (4.21) entre champ magnétique et courant (théorème d'Ampère) on obtient:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{r} = \iint_s \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s} \quad (5.8)$$

Cette équation signifie que le champ magnétique peut avoir deux causes:

- a) un courant (c'est à dire un mouvement de charges infiniment petites)
- ou
- b) une variation du champ de déplacement électrique

Commentaire :

Le dernier point nécessite une précision: en effet la variation du champ de déplacement peut avoir deux causes:

- la première, assez évidente, est la variation ou le mouvement de charges dans le milieu considéré (déplacement de ions par exemples)

- la seconde concerne plus directement la physique de la matière (conductrice ou non). En effet, en plus des éventuels électrons libres, la matière est constituée d'atomes ou de molécules composés d'un assemblage de charges élémentaires (positives et négatives). Sous l'action d'un champ électrique, ces charges élémentaires vont se déplacer (on parle de *polarisation* de la matière). Il en résulte donc un *déplacement* de charges, de plus, si le champ électrique varie dans le temps, ce déplacement varie de la même manière au cours du temps. On observe donc un mouvement des charges constitutives de la matière, donc une variation du champ de déplacement électrique. Ceci est illustré ci-dessous en considérant un atome d'hélium a) en l'absence de champ électrique; b) lorsque le champ électrique appliqué à la matière (hélium) est compté positif (arbitraire) et c) lorsque le champ électrique est négatif.

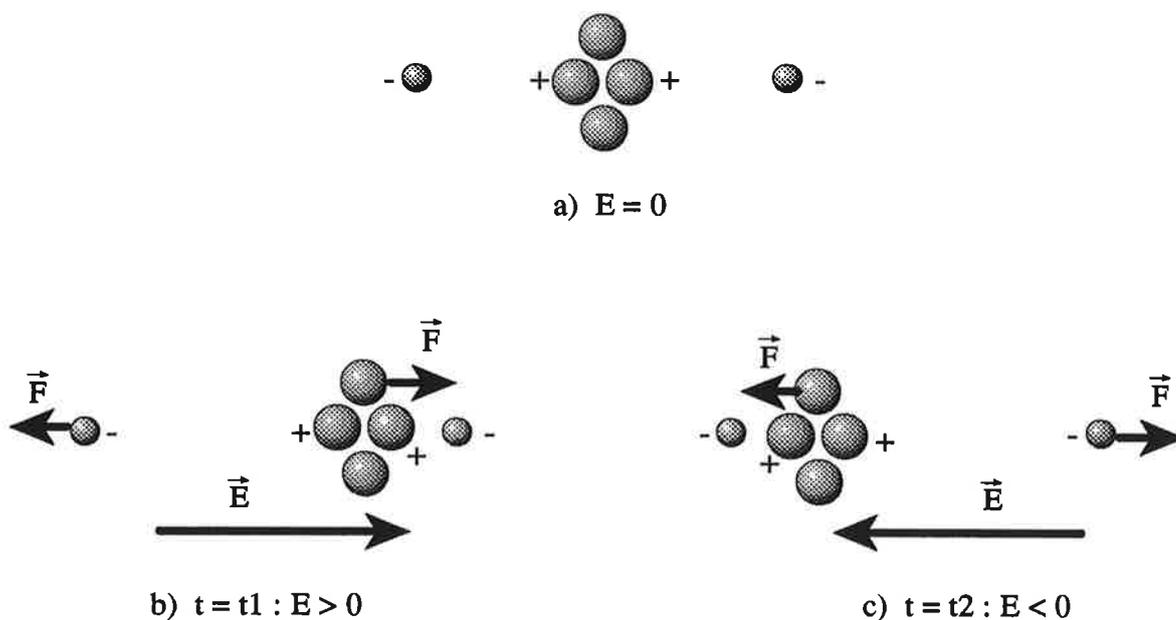


Fig. 5.3

5.5 Equations de Maxwell

Historiquement, l'expérimentation scientifique a permis d'établir, ceci entre les années 1750 et 1850 environ, les diverses relations décrites ci-dessus, ceci sans qu'il y ait une relation bien précise entre les domaines de l'électrostatique, de l'électrodynamique et de la magnétostatique. C'est en 1865 que James-Clerk Maxwell propose une synthèse

de ces différentes équations et met en évidence l'interdépendance des domaines précités. Ce travail de synthèse permet en outre de prédire l'existence d'ondes électromagnétiques (la mise en évidence de celles-ci sera réalisée par Hertz en 1887) dont la lumière est un cas particulier.

Ce paragraphe s'inspire de la démarche historique puisque l'on reprend les diverses équations développées dans les chapitres précédents afin d'aboutir aux relations qui caractérisent les champs électromagnétiques, relations connues sous le nom d'*équations de Maxwell*. Ces équations peuvent exprimer l'interdépendance des champs électromagnétiques à l'intérieur d'un volume. On parle alors de *forme globale* et le calcul se fait à l'aide d'*intégrales*. On peut également décrire l'interdépendance de ces champs en un point. On parle de *forme locale* pour ces équations et le calcul fait usage de fonctions de dérivations. Il convient de préciser que, dans la plupart des problèmes, la résolution est plus aisée en utilisant la forme locale, pour autant que cette dernière s'applique au problème.

Dans le chapitre 2, consacré à l'électrostatique, l'équation 2.15 exprime la relation entre le flux du déplacement électrique et la charge (théorème de Gauss). De façon similaire, l'équation 4.10 (chapitre 4) montre que le flux magnétique est nul sur une surface fermée. De plus, on a établi une interdépendance entre les champs électrique et magnétique (chapitre 5), interdépendance décrite par les relations 5.5 et 5.8.

En outre diverses relations décrivent les propriétés de la matière, il s'agit des relations 2.3 (qui lie le champ électrique au champ de déplacement), 3.14 (relation entre la densité de courant et le champ électrique) et 4.7 (qui lie le champ magnétique au champ d'induction). On obtient alors un système de 7 équations intégrales vectorielles à 5 inconnues (vectorielles). Les quatre premières équations sont connues sous le nom d'*équations de Maxwell* sous leur forme globale.

$$\oiint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad (2.15)$$

$$\oiint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.10)$$

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (5.5)$$

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{r} = \iint_s \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (5.8)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2.3)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (3.14)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (4.7)$$

Ces équations expriment la relations entre les différents champs électromagnétiques sur un volume de l'espace considéré. On peut dériver les quatres premières de façon à obtenir la *forme locale* des équations de Maxwell. En effet, en appliquant le théorème de la divergence sur les équations 2.15 et 4.10 on obtient les relations en divergences

2.17 et 4.11. En appliquant le théorème de Stokes sur les équations 5.5 et 5.8 on obtient les relations 5.9 et 5.10:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v \quad (2.17)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.11)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (5.10)$$

Ces équations décrivent la relation entre les différents champs électromagnétiques en un point de l'espace considéré. Elles sont généralement d'un emploi moins lourd que les relations sous forme globale.

### 5.6 Equations de Maxwell locales en représentation complexe

Les relations ci-dessus font intervenir des dérivées spatiales et temporelle. En ne considérant que des variations de type sinusoïdale pour les champs électromagnétiques (ceci par une démarche analogue à celle suivie en électrotechnique) on peut écrire les équations suivantes dans le domaine complexe:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v \quad (5.11)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.12)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (5.13)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} \quad (5.14)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (5.15)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (5.16)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (5.17)$$

Les champs électromagnétiques sont alors symbolisés par une grandeur complexe qui exprime leur amplitude et leur phase.

### 5.7 Application des équations de Maxwell: effet de blindage

Dans l'exemple qui suit, on cherche à calculer l'atténuation produite par une plaque métallique d'épaisseur  $e$  sur une onde électromagnétique, onde décrite par un champ électrique et un champ magnétique (figure 5.4).

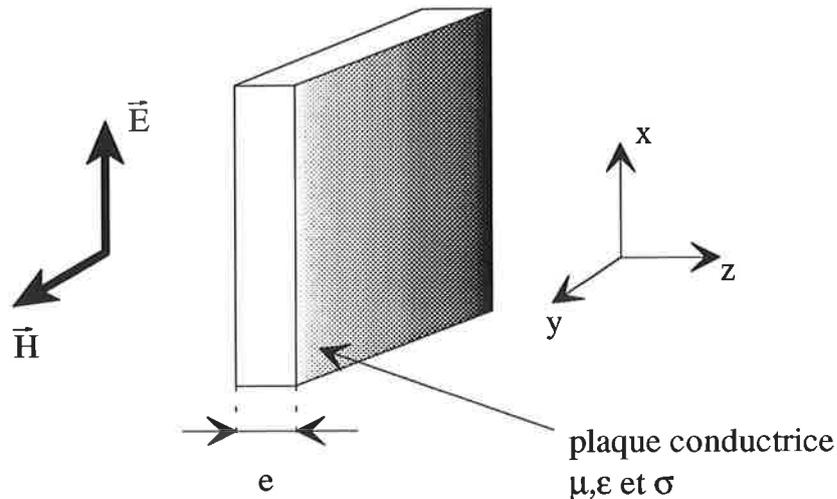


Fig. 5.4

Afin de simplifier le calcul, on suppose que les champs électrique et magnétique décrivent une onde plane et qu'ils varient de façon sinusoïdale. Ceci permet d'utiliser les équations de Maxwell sous forme complexe. De plus, on suppose que la plaque métallique est infinie selon les axes  $x$  et  $y$  et qu'elle est constituée en une matière homogène. En combinant les équations 5.13 avec 5.17 on obtient la relation 5.18; de même, en combinant 5.14 avec 5.15 et 5.16 on obtient 5.19

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = j\omega\mu\vec{H} \quad (5.18)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = (j\omega\epsilon + \sigma)\vec{E} \quad (5.19)$$

En exprimant le champ magnétique à l'aide du champ électrique (eq. 5.18) et en introduisant sa valeur dans 5.19 on obtient une relation en double rotationnel du champ électrique. Dans un métal, la densité de charges est nulle (cf. chapitre 2 § 2.12) l'expression en double rotationnel se simplifie alors en:

$$\Delta\vec{E} = j\omega\mu(j\omega\epsilon + \sigma)\vec{E} \quad (5.20)$$

La plaque étant infinie en  $x$  et  $y$ , le champ électrique ne peut varier que selon l'axe  $z$ ; il en résulte que seules les dérivées selon  $z$  sont non nulles, donc

$$\frac{\partial^2 E_{(z)}}{\partial^2 z} = j\omega\mu(j\omega\epsilon + \sigma)E_{(z)} \quad (5.21)$$

ou

$$\frac{\partial^2 E_{(z)}}{\partial^2 z} = aE_{(z)} \quad \text{avec } a = j\omega\mu(j\omega\epsilon + \sigma) \quad (5.22)$$

En résolvant à l'aide de la transformée de Laplace, on obtient, dans le domaine de Laplace :

$$p^2 E(p) - pE(0) - \frac{\partial E(0)}{\partial z} = aE(p) \quad (5.23)$$

A la frontière entre le métal et l'air, l'onde reste constante, donc la dérivée du champ électrique est nulle à cet endroit:

$$\frac{\partial E(0)}{\partial z} = 0 \quad (5.24)$$

on obtient alors:

$$E(p) = \frac{pE(0)}{p^2 - a} \quad (5.25)$$

et en prenant la transformée inverse:

$$E_{(z)} = E(0) \cosh(\pm \sqrt{a} \cdot z) \quad (5.26)$$

L'expression en cosinus hyperbolique fait intervenir des exponentielles croissantes selon  $z$ . Ce type de solution n'est pas réaliste et doit être rejeté. Il en résulte:

$$E_{(z)} = E(0) e^{-\sqrt{a}z} \quad (5.27)$$

et en faisant intervenir la constante  $a$  on obtient:

$$E_{(z)} = E(0) e^{-\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z} e^{j\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z} \quad (5.28)$$

Le premier terme décrit l'atténuation du champ électrique en fonction de la distance  $z$ ; le second décrit le déphasage introduit par la plaque métallique.

Remarque :

Le calcul peut être mené de façon semblable sur le champ magnétique et l'on trouve, pour ce dernier, une expression similaire à 5.28.

Définition :

On appelle *profondeur de pénétration*  $\delta$  la distance à laquelle l'exposant de l'exponentielle est unitaire, donc

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (5.29)$$

A cette distance l'onde électromagnétique est atténuée de 63% environ.

### 5.8 Application des équations de Maxwell: effet pelliculaire

On cherche à calculer la répartition de la densité de courant dans un conducteur parcouru par un courant  $I$  sinusoïdal. Afin de simplifier le problème, on considère un conducteur plan de dimensions infinies en  $x$  et  $y$  (figure 5.5)

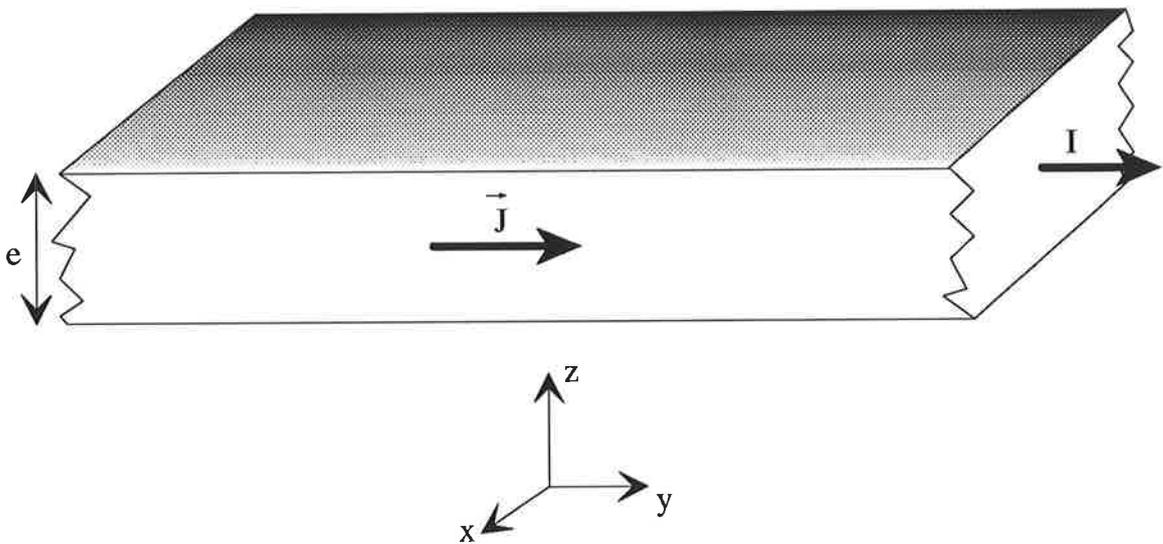


Fig. 5.5

Le calcul s'effectue de la même manière que celui effectué au paragraphe précédent: on peut écrire les équations

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (\text{densité de charge nulle dans le métal}) \quad (5.11)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.12)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\vec{B} \quad (5.13)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} - j\omega\vec{D} \quad (5.14)$$

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \quad (5.15)$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \quad (5.16)$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad (5.17)$$

En combinant les équations 5.15 et 5.16 dans 5.14, puis 5.16 et 5.17 dans 5.13, on obtient:

$$\vec{\nabla} \times \vec{J} = -j\omega\mu\sigma\vec{H} \quad (5.30)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \left(1 - \frac{j\omega\epsilon}{\sigma}\right) \vec{J} \quad (5.31)$$

Comme dans l'exemple précédent, le terme en  $\epsilon$  est très petit face au terme en  $\sigma$ ; l'expression 5.31 se simplifie donc:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (5.32)$$

En combinant 5.30 et 5.32 on trouve et en faisant usage de 5.11

$$\Delta \vec{J} = j\omega\mu \vec{J} \quad (5.33)$$

expression qui est très proche de 5.20 et par un raisonnement analogue, on obtient

$$J_{(z)} = J(0) \cosh(\alpha z) \quad (5.34)$$

avec  $\alpha = \sqrt{j\omega\mu\sigma}$

La constante  $J(0)$  se détermine en intégrant  $J_{(z)}$  sur toute la section du conducteur et on obtient:

$$J_{(z)} = \frac{\alpha I}{2 \sinh(\alpha e / 2)} \cosh(\alpha z) \quad (5.35)$$

- Remarques :**
- Le résultat ci-dessus est un nombre complexe, c'est à dire qu'il exprime la variation de la densité de courant  $J$  en module *et* en phase.
  - On constate que la densité de courant au centre du conducteur tend vers zéro si l'épaisseur  $e$  est grande face à la profondeur de pénétration (5.29).
  - On peut calculer qu'environ les 86% du courant circulent à une distance  $\delta$  sous la surface du conducteur.
  - Comme dans l'exemple du paragraphe 5.7, on peut déterminer les champs électrique et magnétique existant dans le conducteur. Leur expression est similaire à celle de la densité de courant.

## 5.9 Bilan énergétique et vecteur de Poynting

Les relations 5.13 et 5.14 montrent qu'une variation temporelle d'un champ électrique ou magnétique provoque une variation spatiale de l'autre. De façon générale, cette variation spatiale est également accompagnée d'une variation temporelle (ceci est évident dans le cas d'une variation sinusoïdale). On a donc un champ électrique variable qui induit un champ magnétique (variable également) qui, à son tour, génère un champ électrique et ainsi de suite. Ce phénomène décrit la propagation d'une *onde électromagnétique*. Comme la notion de force est à la base de la définition des champs électrique et magnétique, la propagation d'une onde est également caractérisée par un transfert d'énergie.

Le transfert de puissance associé à une onde électromagnétique est obtenu par la relation suivante connue sous le nom de *relation de Poynting*:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad [\text{W/m}^2] \quad (5.36)$$

Le vecteur  $\vec{S}$  a la dimension d'une densité de puissance [ $\text{W/m}^2$ ] et exprime le transfert de puissance en un point donné de l'espace.

La relation 5.36 peut être développée en faisant usage des propriétés de l'opérateur  $\nabla$  et en introduisant les relations 5.9 et 5.10

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} = \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} \\ &= -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Le dernier terme de 5.37 décrit les pertes par effet Joules (cf. chapitre 3 §3.4), les deux autres termes (en champs électrique et magnétique) expriment la variation de densité des énergies magnétique et électrique.

L'usage du vecteur de Poynting est fréquent lors de l'étude des phénomènes de rayonnement et plus particulièrement lors de l'étude des antennes ou il est associé aux définitions d'impédance et d'admittance de l'onde (cf. cours de télécommunications).

## Références

Traité d'électricité vol I, III et IX	Editions Georgi
Physique générale (Prof. J.-P. Borel)	EPFL
Electromagnétisme (J. A. Edminister)	SCHAUM
Reference data for engineers	ITT